PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 5

Pág. 153

Actividades de investigação

Admitindo o raio da circunferência maior igual a 1.
Sejam $r_1, r_2, ..., r_7$ os raios das semicircunferências menores.

Sabemos que $r_1 + r_2 + ... + r_7 = 1$. A soma dos comprimentos das semicircunferências menores é:

$$\pi r_1 + \pi r_2 + ... \pi r_7 = \pi(r_1 + r_2 + ... + r_7) = \pi$$

Pág. 155

1.1 $\lim\limits_{x\to 2}(-3x^2) = -3\times 2^2 = -3\times 4 = -12$

1.2 $\lim\limits_{x\to 0}(-3) = -3$

1.3 $\lim\limits_{x\to -5}(-1-x^2) = -1-(-5)^2 = -1-25 = -26$

1.4 $\lim\limits_{x\to 0}(-2x+3x^2) = -2\times 0 + 3\times 0^2 = 0$

1.5 $\lim\limits_{x\to 1}(-2x+x-2) = -2\times 1+1-2 = -3$

Pág. 156

2.1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Calculam-se os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1-x) = 1-1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1) = 1^2-1 = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 e o valor deste limite é igual ao valor comum dos limites laterais.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

2.2 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Calculam-se os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(3x-5) = 3\times 2-5 = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1) = 2^2-1 = 3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2.3 $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3}\sqrt{1-x} = \sqrt{1+3} = 2$

Pág. 157

3.1 **a)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

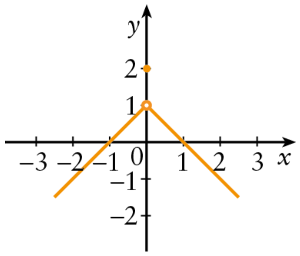
c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

3.2 **a)** $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ não existe

3.3 Por exemplo:



Pág. 159

4. Queremos mostrar, usando a definição de limite segundo Heine, que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$.

Para o mostrarmos, usando a definição, vamos começar por escrever sucessões convergentes para zero.
Temos um número infinito de sucessões que convergem para zero:

$a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{2n}$; $c_n = -\frac{1}{n}$; $d_n = -\frac{1}{2n}$;...

Se considerarmos a sucessão $a_n = \frac{1}{n}$, a sucessão das imagens, $\frac{\frac{1}{n}}{\left|\frac{1}{n}\right|} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, tende para 1.

Se considerarmos a sucessão $c_n = -\frac{1}{n}$, a sucessão das imagens, $\frac{-\frac{1}{n}}{\left|-\frac{1}{n}\right|} = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -1$, converge para −1.

Encontramos duas sucessões nas condições da definição, ambas convergentes para zero, todos os termos das sucessões das imagens convergiam para valores diferentes. Logo, a função não tem limite quando $x \to 0$.

Pág. 160

5.1 $\lim\limits_{x\to 7}(9) = 9$ **5.2** $\lim\limits_{x\to 2}(-3) = -3$

5.3 $\lim\limits_{x\to 0}(-\pi) = -\pi$ **5.4** $\lim\limits_{h\to 0}(-2h) = -2\times 0 = 0$

5.5 $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x) = \lim\limits_{x\to 5}x^2 - \lim\limits_{x\to 5}2x =$

$= 5^2 - 2\times 5 = 25-10 = 15$

5.6 $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-3x+4\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to -1}x^2-3\lim\limits_{x\to -1}x+\lim\limits_{x\to -1}4\right)^2$

$=\left((-1)^2-3\times(-1)+4\right)^2=(-1+3+4)^2=8^2=64$

5.7 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x^2-2x\right)^5$

$=\left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x^2-2x\right)\right]^5=\left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-2\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x\right]^5$

$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\right]^5=\left[\frac{1}{4}-1\right]^5=\left(-\frac{3}{4}\right)^5=-\frac{243}{1024}$

5.8 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-3)(x+9)}{2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)(x+9)}{\lim\limits_{x\to 1}2x}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)\times\lim\limits_{x\to 1}(x+9)}{\lim\limits_{x\to 1}2x}$

$=\frac{(1-3)\times(1+9)}{2\times 1}=\frac{-2\times 10}{2}=-10$

5.9 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x+3}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}}$

$=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}x}}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$

Pág. 162

6.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-50+x)=+\infty$

6.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-50+x)=-\infty$

6.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

6.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2000+x)=-\infty$

6.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3+\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2$

$=+\infty+\infty=+\infty$

6.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$

$=+\infty+\infty=+\infty$

6.7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2-x^3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$

$=-(+\infty)-(+\infty)=-\infty$

Pág. 164

7.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)=3\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)$

$=3\times(+\infty)^2=+\infty$

7.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2\right)=3\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=3\times(-\infty)^2=+\infty$

7.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x(3-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)$

$=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

7.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}[x(3+x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)\times\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x)$

$=-\infty\times(-\infty)=+\infty$

Pág. 165

8.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x+3}=\frac{5}{+\infty}=0$

8.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{-\infty}=0$

8.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2+1}=\frac{8}{+\infty}=0$

8.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+3}=\frac{-1}{-\infty}=0$

Pág. 166

9.1 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{x-1}$

Como $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Como os limites laterais são diferentes, não existe

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{x-1}$

9.2 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{x^2-4}$

Como $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4\right)=0$ vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{0^+}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

Como os limites laterais são diferentes, não existe

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}$

9.3 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$

Como $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$ vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Logo, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=+\infty$.

Pág. 167

10.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2+2\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=(+\infty)^3=+\infty$

10.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=(+\infty)^3=+\infty$

10.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x+\frac{1}{2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=2\times\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=2\times(-\infty)^3=-\infty$

10.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5+x^4+2\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^5=-3\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-3\times(-\infty)^5=+\infty$

Pág. 168

11.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{2}$

Aplicando os teoremas sobre limites somos conduzidos a uma determinação do tipo $\infty-\infty$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3-x}{2\times\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$

$=\frac{3}{2}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{+\infty}=\frac{3}{2}\times0=0$

11.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$

11.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+2}+3x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9x^2+2-9x^2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}=\frac{2}{+\infty}=0$

11.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x}-\sqrt{2x+3}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}\right)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-(2x+3)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$

$=\frac{-3}{+\infty}$

$=0$

Pág. 169

12.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1$

12.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{1-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-3x^2}=-\frac{1}{3}$

12.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x-1}+\frac{x^2}{1-x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^2}$

$=2+(-1)=1$

Pág. 170

13.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

13.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{-x}=0$

13.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x^2-3}+\frac{x}{x^2-1}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-3}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0+0=0$

14.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

14.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=-(-\infty)=+\infty$

14.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x^2+x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-(+\infty)=-\infty$

Pág. 171

15.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\times\frac{1}{x^2}\right)$, temos uma indeterminação do tipo $(\infty\times 0)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

15.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\times\left(x^3+1\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=+\infty$

15.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5\times\frac{x^2+1}{x^3-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7+x^5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$

Pág. 172

16.1 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Como estamos perante uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, é porque os polinómios do numerador são divisíveis por $x-2$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\qquad=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

16.2 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-3}(x-3)$

$=-6$

16.3 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+3}{x-2}=\frac{-1+3}{-1-2}$

$=-\frac{2}{3}$

Cálculo auxiliar

	1	4	3
−1		−1	−3
	1	3	0

	1	−1	−2
−1		−1	−2
	1	−2	0

16.4 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{2x^2-8x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-5x+6\right)}{(2x-6)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+6}{2x-6}=\frac{1^2-5+6}{2-6}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

Cálculo auxiliar

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

	2	−8	6
1		2	−6
	2	−6	0

17.1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x^2\times\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x^2\times\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x\times\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{0^+}$

$=+\infty$

17.2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[-\left(1+\sqrt{x}\right)\right]$

$=-2$

17.3 $\lim\limits_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+5}-1}{x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x+5}+1\right)}{(x+4)\left(\sqrt{x+5}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-4}\frac{x+5-1}{(x+4)\left(\sqrt{x+5}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+1}$

$=\frac{1}{2}$

Pág. 173

18.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+1}{x^6}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{x^6}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6}$

$=+\infty+0$

$=+\infty$

18.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x^3}=\frac{0}{-\infty}=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0,\ a>1\right)$

18.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{x+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x(1-3)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x(-2)}{x^2}$

$=-2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^2}$

$=-2\times(+\infty)$

$=-\infty$

18.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{\pi^x}{3^{x+1}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi^x}{3^{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi^x}{3^x\times3}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^x\times\frac{1}{3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^x\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\right]$

Como, $0<\frac{1}{2}<1$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

e como $\frac{\pi}{3}>1$ então $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^x=+\infty$

$=0+\left(+\infty\times\frac{1}{3}\right)=+\infty$

18.5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{5x}}{x^8}\right)=\frac{0}{+\infty}=0$

Pág. 174

19.1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

19.2 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-(-x)}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=-1$

19.3 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-1\right)\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^{2x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$

$=1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

19.4 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\,e^x-2}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\times\left(e^{2x}-1\right)}{6x}$

$=\frac{1}{3}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

$=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$

19.5 $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{2x-2}=\lim\limits_{x-1\to0}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)}$

$=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x-1\to0}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

Pág. 175

20.1 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)^2}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\times\ln(x+1)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

20.2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x^3}{3x-3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{3\times\ln(x)}{3(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln((x-1)+1)}{x-1}\underset{y=x-1}{=}\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$

20.3 $\lim\limits_{f(x)\to1}\frac{\ln(f(x))}{f(x)-1}(1)$

Seja $y=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)=y+1$

Se $f(x)\to1, y\to0$

Substituindo em (1):

$\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$

20.4 $\lim\limits_{x\to-4}\frac{\ln(5+x)}{4+x}$

Seja $y=4+x\Rightarrow x=y-4$

Se $x\to-4, y\to0$

Então vem:

$\lim\limits_{x\to-4}\frac{\ln(5+x)}{4+x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$

21.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x)}{2x}\times 2\right]$

$=2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{2x}$ $(y=2x)$

$=2\times\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln y}{y}=2\times0=0$

21.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-3x)}{x}=-3\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-3x)}{-3x}$

Efectuando a seguinte mudança de variável:

$-3x=y$

Se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$.

Temos:

$-3\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-3x)}{-3x}$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln(3y)}{y}$

$=-3\times\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}$

$=3\times0=0$

21.3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$

20.4 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(-2x)}{x}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$

Pág. 177

22.1 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x}=3\lim\limits_{3x\to0}\frac{\sin(3x)}{3x}=3\times1=3$

22.2 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(4x)}{\operatorname{tg}(5x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(4x)\cos(5x)}{\sin(5x)\cos(4x)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{\sin(5x)}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(5x)}{\cos(4x)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin(4x)}{4x}\times4x}{\frac{\sin(5x)}{5x}\times5x}\times\frac{1}{1}=$

$\frac{3}{5}\frac{\lim\limits_{4x\to0}\frac{\sin(4x)}{4x}}{\lim\limits_{5x\to0}\frac{\sin(5x)}{5x}}\times1=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$

22.3 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

Fazendo $y=x-\pi$, temos $x=\pi+y$ e se $x\to\pi$, $y\to0$

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(\pi+y)}{-y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{-\sin y}{-y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}-1$

22.4 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=$

$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Pág. 178

1. $\lim u_n=\lim\left(5-e^{-n}\right)$

$=\lim5-\lim e^{-n}=\lim5-\lim\frac{1}{e^n}=5-0=5$

Resposta: (D).

2. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3$

$=\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3=e^3$

Resposta: (A).

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{e^x-1}{x}}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

Resposta: (D).

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2e^{3x}\right)=$

$y=-3x\Leftrightarrow x=-\frac{y}{3}$

$x\to-\infty\Rightarrow y\to+\infty$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\left[3\times\left(-\frac{y}{3}\right)^2\times e^{-y}\right]=$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(3\times\frac{y^2}{9}\times e^{-y}\right)=$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{+\infty}=\frac{1}{3}\times0=0$

Resposta: (C).

5. $f(x)=a+e^{bx}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$
- O gráfico de *f*, intersecta o eixo *Oy* em *P* (0, 3)

Daí que: $3=a+e^{b\times0}$, porque (0, 3) é um ponto do gráfico de *f*.

$\Leftrightarrow3=a+e^0\Leftrightarrow3=a+1\Leftrightarrow a=2$

Resposta: (A).

6. $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{k}{0^+}$

com k um número real negativo. Logo, $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\infty$

Resposta: (C).

7. $\lim\limits_{x\to 3^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-x}{x-3}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

Resposta: (C).

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln(x)}=\dfrac{0^+}{-\infty}=0$

Resposta: (D).

9. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{k}{0^+}$,

com k um número real positivo. Logo, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

Resposta: (A).

Pág. 179

1.1 $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+\dfrac{1}{x}>0\right\}$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x^3+1	–	0	+		+
x	–	–	–		+
$\dfrac{x^3+1}{x}$	+	0	–		+

Cálculo auxiliar

$$x^2+\frac{1}{x}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x}=0$$
$$\Leftrightarrow x^3+1=0\wedge x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x=-1\wedge x\neq 0$$

Logo, $D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln(x^2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)-\ln(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x^3+1}{x}\right)-\ln(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{\frac{x^3+1}{x}}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^3+1}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)=0$

2.1 $D_f=\mathbb{R}$

2.2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+5x^3\,\mathrm{e}^{-x}\right)$

$=-1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3\,\mathrm{e}^{-x}\right)$

$=-1+5\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}\right)$

$=-1+5\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}}\right)=-1+5\times\dfrac{1}{+\infty}$

$=-1+5\times 0=-1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+5x^3\,\mathrm{e}^{-x}\right)$

$=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3\,\mathrm{e}^{-x}\right)$

$=-1+5(-\infty)(+\infty)$

$=-\infty$

3.1

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=+\infty-0=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=0$, pois $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

3.2

a) $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-1>0\right\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

b) $f(x)>g(x)$

Com o auxílio da calculadora gráfica e introduzindo na mesma as funções:

$y_1=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

$y_2=5+\ln(x^2-1)$

Com a ajuda da calculadora, determinou-se a intersecção dos gráficos e conclui-se que:

$f(x)>g(x)\Rightarrow x\in\left]3{,}17;\ +\infty\right[$

4.1 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{-\infty}=0$

4.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}}$

$= \dfrac{1}{+\infty} = 0$

4.3 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1-x}{x^2+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

Como $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$, então $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$.

5.1 $Q(0) = 250\ e^{-0{,}05 \times 0} = 250$

Significa que no início (instante $t = 0$) o recipiente contém 250 gramas de sal.

5.2 $Q(10) = 250\ e^{-0{,}05 \times 10} = 250\ e^{-0{,}5}$

$= \dfrac{250}{e^{0{,}5}} \approx 151{,}63$ (2 c. d.)

Significa que no instante $t = 10$ minutos, ainda havia, aproximadamente, 151,63 gramas de sal por dissolver.

5.3 $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 250\ e^{-0{,}05t} = 0$

Significa que à medida que o tempo decorre a quantidade de sal por dissolver, aproxima-se de zero gramas.

6. $v(t) = \begin{cases} 15 + 10 \times 3^{-0{,}2t}, & 0 \le t \le 10 \\ 5 + A \times 3^{-0{,}2t} + 2, & t \ge 10 \end{cases}$

6.1 $V(0) = 15 + 10 \times 3^{-0{,}2 \times 0} = 15 + 10 \times 3^0 = 25$

Significa que no início o móvel tinha uma velocidade de 25 m/s.

6.2 $\lim\limits_{t\to10} v(t)$ existe se: $\lim\limits_{t\to10^+} v(t) = \lim\limits_{t\to10^-} v(t)$

Assim:

$\lim\limits_{t\to10^+} v(t) = \lim\limits_{t\to10^-} v(t)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to10^+} \left(5 + A \times 3^{-0{,}2t+2}\right) = \lim\limits_{t\to10^-} \left(15 + 10 \times 3^{-0{,}2t}\right)$

$\Leftrightarrow 5 + A \times 3^{-0{,}2\times10+2} = 15 + 10 \times 3^{-0{,}2\times10}$

$\Leftrightarrow A \times 3^{-2+2} = 10 + 10 \times 3^{-2}$

$\Leftrightarrow A = 10 + \dfrac{10}{3^2}$

$\Leftrightarrow A = 10 + \dfrac{10}{9}$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{100}{9}$

6.3 $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(5 + \dfrac{100}{9} \times 3^{-0{,}2t+2}\right)$

$= 5 + \dfrac{100}{9} \lim\limits_{t\to+\infty} 3^{-0{,}2t+2}$ $= 5 + \dfrac{100}{9} \lim\limits_{t\to+\infty} 3^{-0{,}2t} \times 3^2 =$

$= 5 + \dfrac{100}{9} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{9}{3^{0{,}2t}} = 5 + \dfrac{100}{9} \times 0 = 5$

Conclusão:

À medida que o tempo aumenta (indefinidamente), o móvel tende a atingir uma velocidade de 5 m/s. Daí que a velocidade do móvel pode atingir, obviamente, os 4 m/s.

Pág. 183

1.1 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$

(i) $0 \in D_f$

(ii) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{X\to0^+} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{X\to0^-} x = 0$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, então a função f não é contínua no ponto $x = 0$.

(iii) $f(0) = 0$

Atendendo a que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) \neq \lim\limits_{X\to0^+} f(x)$ a função f é contínua à esquerda no ponto 0 e descontínua à direita.

1.2 $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \ge -1 \\ 2x & \text{se } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ 2x & \text{se } x < -1 \end{cases}$

(i) $-1 \in D_g$

(ii) $\lim\limits_{x\to-1^+} (-x) = 1$

$\lim\limits_{x\to-1^-} 2x = -2$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$. A função g não é contínua no ponto $x = -1$.

(iii) $g(-1) = 1$

Atendendo a que:

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = g(-1) \neq \lim\limits_{X\to-1^-} g(x)$ a função g é contínua à direita em – 1 e descontínua à esquerda.

1.3 $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

(i) $1 \in D_h$

(ii) $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0}$

Temos, assim, de calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Atendendo a que não existe $\lim\limits_{x\to1} h(x)$, e como neste ponto os limites laterais são infinitos, então a função *h* não é contínua nem à direita nem à esquerda no ponto 1.

1.4 $$i(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x>-2 \\ 3 & \text{se } x=-2 \\ -1 & \text{se } x<-2 \end{cases}$$

(i) $-2 \in D_i$

(ii) $\lim\limits_{x\to-2^+} i(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$

$\lim\limits_{x\to-2^-} i(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} -1 = -1$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to-2} i(x)$ e a função *i* não é contínua no ponto $x = -2$.

Atendendo a que:

$\lim\limits_{x\to-2^+} i(x) = i(-2) \neq \lim\limits_{X\to-2^-} i(x)$ a função *i* é contínua à direita em – 2 e descontínua à esquerda nesse ponto.

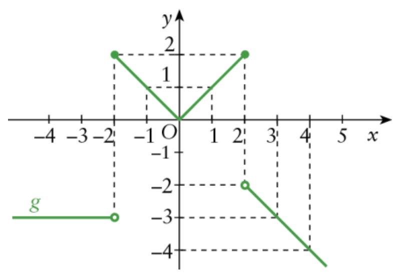
Pág. 184

2.1 $D_g = [0, 4]$

2.2 Em 0, 2 e 4 a função *g* é contínua.
Em 1 é descontínua, mas contínua à direita.
Em 3 é descontínua.

Pág. 186

3.1



3.2 A função é contínua nos seguintes intervalos:
$]-\infty, -2[$; $[-2, 2]$; $]2, +\infty[$.

Pág.187

4.1 Por exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x+1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-1)^2 - 1 = x^2 + 2x = h(x)$

4.2 A função *h* é contínua no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$, por ser a composta de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (funções polinomiais).

5. A função $y = \ln(x)$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ e a função $y = \frac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ é a composta de duas funções contínuas.

Assim, a função *f* é contínua no seu domínio, ou seja, em $\mathbb{R}^+$.

Pág.191

6.1 $$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

Estudo das assimptotas verticais do gráfico de *f*:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2-1}{x} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

Logo, a recta da equação $x = 0$ é uma assimptota vertical do gráfico de *f* .

Estudo das assimptotas não-verticais do gráfico de *f*:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x + \frac{-1}{x}$$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +\ 0\,x & -\ 1 & x \\ \hline -x^2 & & & x \\ \hline & & -\ 1 & \end{array}$$

Logo, o gráfico de *f* tem uma assimptota não vertical (oblíqua), que é a recta da equação $y = x$.

6.2 $$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Estudo das assimptotas verticais do gráfico de *f*:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2-1}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$$

Aplicando a Regra de Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Assim, vem que:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Logo, a recta da equação $x = 1$ é uma assimptota vertical do gráfico de *f*.

Estudo das assimptotas não-verticais do gráfico de *f*:

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +\,0x^2 & +\,0x & +\,1 & x^2-1 \\ \hline -x^3 & & +\,x & & x \\ \hline & & +\,x & +\,1 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

$$= x + \frac{x+1}{x^2-1}$$

A recta da equação $y = x$ é uma assimptota não-vertical do gráfico de *f*.

6.3 $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$

Estudo das assimptotas verticais do gráfico de *f*:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{1-x} = \frac{4}{0^-}$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{1-x}$$
$$= \frac{4}{0^+}$$
$$= +\infty$$

A recta da equação $x = 1$ é uma assimptota vertical ao gráfico de *f*.

Estudo das assimptotas não-verticais do gráfico de *f*:

$$g(x) = \frac{x^2+3}{1-x} = -x - 1 + \frac{4}{-x+1}$$

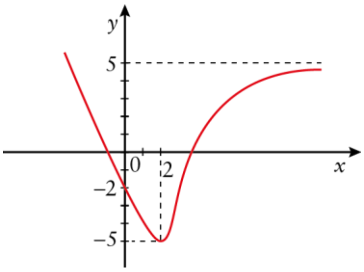
Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +\,0x & +\,3 & -x-1 \\ \hline -x^2 & +\,x & & -x-1 \\ \hline & x & +\,3 & \\ & -x & +\,1 & \\ \hline & & 4 & \end{array}$$

Logo, a recta da equação $y = -x - 1$ é uma assimptota não-vertical (oblíqua) do gráfico de *f*.

Pág. 194

1. Um gráfico possível da função *h* será o seguinte:



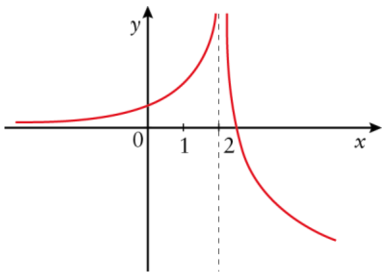
A afirmação (A) é falsa, a função *h* tem dois zeros e não um;

A afirmação (B) é falsa, pois o contradomínio de *h* é $[-5,+\infty[$;

A afirmação (C) é falsa, pois se a recta da equação $y = 5$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *h*, quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$;

(D) é verdadeira.

2. Um gráfico possível da função *h* será o seguinte:



A afirmação (A) é falsa, pois se *f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} h(x) = +\infty$; então, *f* tem pelo menos um zero;

A afirmação (B) é falsa, a recta da equação $x = 2$ é uma assimptota vertical do gráfico de *h*;

A afirmação (C) é falsa, a recta da equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *h*;

A afirmação (D) é verdadeira, uma vez que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2} h(x) = +\infty$; então, a recta da equação $y = -1$ intersecta, em pelo menos um ponto, o gráfico de *h*.

(D) é verdadeira.

3. Pretendemos calcular $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+f(x)}{1-e^x}$.

Como a recta da equação $y = -2$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f*, quando $x \to -\infty$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, daí que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+f(x)}{1-e^x}=\frac{2-2}{1-0}=0$$

$$=\frac{2}{1-0^+}+\frac{-2}{1-0^+}=0\text{, pois }\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+.$$

Resposta (D).

4. Sabe-se que $D_f=\mathbb{R}^+$ e a recta da equação $y=-5$ é uma assimptota horizontal do gráfico de h. Assim,

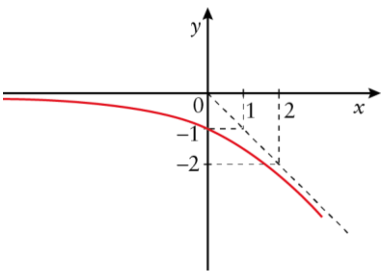
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-5.$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{-3e^{-x}}=\frac{-5}{-3\times0^+}=\frac{-5}{0^-}=+\infty$$

Resposta: (B).

5. Um possível gráfico da função f será o seguinte:



Logo, o contradomínio da função f é $]-\infty,0[$, pois f é estritamente decrescente e as rectas das equações $y=-x$ e $y=0$ são assimptotas do seu gráfico.

Resposta: (D).

Pág. 195

1. Sabemos que:

$D_h=\mathbb{R}^+$

e o gráfico de h tem uma assimptota oblíqua, ou seja,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=m$ é diferente de zero e finito.

Assim sendo, e sabendo, também, que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+h(x)}=-\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x+h(x)}{x}=-3$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow1+\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-3\quad\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-4$$

Então $m=-4$ e $y=-4x+b$, com $b\in\mathbb{R}$.

Donde $y=-4x+3$, pois o ponto de coordenadas $(0, 3)$ pertence à recta.

2. Queremos determinar $\lim h(a_n)$, ou seja:

$\lim h(1-n+3n^2)$.

Sabe-se que $\lim h(1-n+3n^2)=\lim 3n^2=+\infty$; então, pela definição de limite de uma função num ponto, segundo Heine, $\lim h(a_n)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=-2$, pois a recta da equação $y=-2$ é uma assimptota horizontal do gráfico de h, quando $x\to+\infty$. Logo, $\lim_{x\to+\infty}h(x)=-2$.

Então, $\lim h(a_n)=-2$.

3.
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(x+1)} & \text{se } x>0\\ k+e^x & \text{se } x\le0\end{cases}$$

Estudemos a continuidade de f para $x=0$:

(i) $0\in D_f$ pois $f(0)$ existe;

(ii) $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\ln(x+1)}=1.$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(k+e^x\right)=k+1$

Daí que $k+1=1\Leftrightarrow k=0$.

Para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$, k deverá ser igual a zero.

4. Sabemos que:

(i) f é contínua em $[0, 3]$;

(ii) $f(0)=10$ e $f(3)=0$.

Pretendemos mostrar que a equação $f(x)=2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 3[$.

Como f é contínua em $[0, 3]$ e $f(3)<2<f(0)$, pelo Teorema de Bolzano, pode concluir-se que

$\exists x\in]0,3[:f(x)=2.$

5.
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{se } x<0\\ 2 & \text{se } x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)+x}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

5.1 A função f é contínua em $]-\infty,0[$, por ser definida por operações entre funções contínuas no seu domínio, a saber:

$f_1(x)=x$, contínua em $\mathbb{R}$, por ser polinomial;

$f_2(x)=1$, contínua em $\mathbb{R}$, por ser constante;

$f_3(x)=\sqrt{1-x}$, contínua em $]-\infty,1]$, que é o seu domínio por ser uma função irracional, e

$]-\infty,0[\subset]-\infty,1]$.

A função f é, também, contínua em $\left]0,+\infty\right[$, por ser definida por operações entre funções contínuas no seu domínio, a saber:

$f_4\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$, contínua em $\left]-1,+\infty\right[$, que é o seu domínio, por ser composta de uma função logarítmica com uma função polinomial.

$f_5\left(x\right)=x$, contínua em $\mathbb{R}$, por ser uma função polinomial (função identidade).

Continuidade para $x = 0$:

f é contínua para $x = 0$ se:

(i) $0\in D_f$

(ii) $\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=f\left(0\right)$.

Ora, $0\in D_f$, pois $f(0) = 2$.

Quanto à condição (ii), temos:

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln\left(1+x\right)+x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1+1=2$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Mas, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-\left(1-x\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=2$$

$\lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=2$, logo,

$\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=2$

$f(0) = 2$.

Então, a condição **(ii)** é também satisfeita.

Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

5.2 $f\left(x\right)=\left|x\right|$

Seja $g\left(x\right)=\left|x\right|=\begin{cases}x & \text{se } x\geq0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

então $f\left(x\right)=\left|x\right|$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=-x\wedge x<0\right)\vee$$

$$\vee\left(\frac{\ln\left(1+x\right)+x}{x}=x\wedge x>0\right)$$

$$\Leftrightarrow x=-3\vee x\approx1,6$$

Estas soluções foram obtidas com o auxílio da calculadora gráfica. Como pretendemos uma solução inteira, vem $x=-3$.

6. $v\left(t\right)=\begin{cases}40\left(1-\mathrm{e}^{kt}\right) & \text{se } t<6\\ 5+15\,\mathrm{e}^{-1,2t+7,2} & \text{se } t\geq6\end{cases}$

6.1 Sabemos que a função v é contínua.

Vamos então garantir a continuidade para $t = 6$.

v é contínua para $t = 6$ se:

(i) $6\in D_v$

(ii) $\lim\limits_{t\to6} v\left(t\right)=v\left(6\right)$.

A primeira condição é verdadeira, pois v (6) existe e é igual a 20.

Quanto à segunda condição, temos:

$$\lim_{t\to6^-} v\left(t\right)=\lim_{t\to6^-}\left[40\left(1-\mathrm{e}^{kt}\right)\right]=40\left(1-\mathrm{e}^{6k}\right);$$

$$\lim_{t\to6^+} v\left(t\right)=\lim_{t\to6^+}\left(5+15\,\mathrm{e}^{-1,2t+7,2}\right)=20$$

Para que o $\lim\limits_{t\to6} v\left(t\right)$ exista, os limites laterais deverão ser iguais, então:

$$40\left(1-\mathrm{e}^{6k}\right)=20\Leftrightarrow40-40\,\mathrm{e}^{6k}=20$$

$$\Leftrightarrow40-20=40\,\mathrm{e}^{6k}\Leftrightarrow20=40\,\mathrm{e}^{6k}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{6k}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1}{2}\right)=6k\Leftrightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{6}\Rightarrow k\approx-0,12$$

6.2 A velocidade aumenta desde o instante em que o pára--quedista salta do avião ($t = 0$) até ao instante em que o pára-quedas abre ($t = 6$), variando de 0 m/s a 20 m/s. Após a abertura do pára-quedas, a velocidade decresce estabilizando em cerca de 5 m/s a partir do instante $t = 10$.