PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 4

Pág. 109

Actividades de investigação

É o resultado da soma de uma progressão geométrica:

$$1+2+4+8+...+2^{63}=\frac{2^{64}-1}{2-1}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

(aproximadamente 1000 vezes a produção mundial/anual de trigo, nos dias de hoje).

Pág. 113

1.1 **a)** $a_{n+1}-a_n=6-\frac{1}{n+1}-\left(6-\frac{1}{n}\right)=$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}>0, \forall n\in\mathbb{N}$

(a_n) é monótona crescente em sentido estrito.

b) $b_1=6-1=55$

$b_2=6+1=7$

$b_2=6-1=5$

$b_2>b_1 \wedge b_3<b_2$

(b_n) não é monótona.

c) $c_{n+1}-c_n=\frac{n+4}{n+2}-\frac{n+3}{n+1}=$

$=\frac{n^2+4n+4+n-n^2-3n-2n-6}{(n+2)(n+1)}=$

$=\frac{-2}{(n+2)(n+1)}<0, \forall n\in\mathbb{N}$

(c_n) é monótona decrescente.

1.2 $u_1=-3$; $u_2=9$ e $u_3=-27$;

$u_2>u_1 \ \wedge\ u_3<u_2$

1.3 $v_5=1$; $v_6=0$ e $v_7=1$;

$v_6<v_5$ e $v_7>v_6$

Pág. 116

2.1 **a)** $a_n=1+\frac{1}{n}$

$0<\frac{1}{n}\le 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$1<1+\frac{1}{n}\le 1+1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$1<a_n\le 2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) (b_n) é uma sucessão constante. Logo, é limitada.

c) $c_n=(-1)^n\times\frac{1}{n}$

$0<\frac{1}{n}\le 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$-1\le(-1)^n\times\frac{1}{n}\le 1$

$-1\le c_n\le 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

d) $d_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par}\\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar}\end{cases}$

Se n é par: $0<\frac{1}{n}\le\frac{1}{2}$

Se n é ímpar: $d_n=-1$

Logo, $-1\le d_n\le\frac{1}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2.2 $a_n=\frac{n}{n+3}$

a) $a_n\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{n}{n+3}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4n\ge n+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n\ge 3\Leftrightarrow n\ge 1$

Como $n\ge 1, \forall\in\mathbb{N}$ temos que $a_n\ge\frac{1}{4}, \forall n\in\mathbb{N}$

b) $n>0, \forall\in\mathbb{N}\wedge n+3>0, \forall\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{n}{n+3}>0, \forall\in\mathbb{N}$

Logo, $0<a_n\le\frac{1}{4}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pág. 118

3.1 **a)** – 2, 0, 2, 4, 6

b) – 2, – 5, – 8, – 11, – 14

c) $-2,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0$

d) – 2, – 2, – 2, – 2, – 2

3.2 • $a_n=\frac{1}{2}-3n$

$a_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}-3(n+1)-\left(\frac{1}{2}-3n\right)=$

$=\frac{1}{2}-3n-3-\frac{1}{2}+3n=-3, \forall n\in\mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão aritmética de diferença –3.

• $b_n=n^2-1$

$b_{n+1}-b_n=(n+1)^2-1-(n^2-1)=$

$=n^2-2n+1-1-n^2+1=-2n+1$

(b_n) não é uma progressão aritmética porque $b_{n+1} - b_n$ não é constante

3.3 $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$

(u_n) é uma progressão aritmética de diferença 3.

4. $u_5 = 14$

$u_8 = 23$

$u_8 = u_5 + 3r$

$23 = 14 + 3r \Leftrightarrow 3r = 9 \Leftrightarrow r = 3$

(u_n) é uma progressão aritmética de diferença 3.

Pág. 122

5.1 – 3, – 6, – 12, – 24, – 48

5.2 – 5, 10, – 20, 40, – 80

5.3 1, – 1, 1, – 1, 1

5.4 Se $r = \sqrt{2}$: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$

Se $r = -\sqrt{2}$: $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 3, $-3\sqrt{2}$, 6, $-6\sqrt{2}$.

6.1 $a_n = 5^{1-n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{1-(n+1)}}{5^{1-n}} = \frac{5^{-n}}{5^{1-n}} = 5^{-n-1+n} = \frac{1}{5}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

6.2 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = 2^{-n-3}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(n+1)-3}}{2^{-n-3}} = \frac{2^{-n-4}}{2^{-n-3}} =$

$= 2^{-n-4+n+3}$

$= 2^{-1} = \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

6.3 $a_n = (-1)^{2n+1} = -1$ porque $2n + 1$ é ímpar, $\forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão 1 (sucessão constante).

6.4 $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{3-n} = 2 \times 3^{n-3}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \times 3^{n+1-3}}{2 \times 3^{n-3}} = \frac{3^{n-2}}{3^{n-3}} = 3^{n-2-n+3} = 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

6.5 $a_n = \frac{-1}{5^n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-1}{5^{n+1}}}{\frac{-1}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = 5^{n-n-1} = \frac{1}{5}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

6.6 $a_n = -\frac{n}{2}(0,4)^{n+1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{n+1}{2}(0,4)^{n+1+1}}{-\frac{n}{2}(0,4)^{n+1}} = \frac{-\frac{n+1}{2}}{-\frac{n}{2}} \times \frac{(0,4)^{n+1+1}}{(0,4)^{n+1}} =$

$= \frac{n+1}{n} \times 0,4, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) não é uma progressão geométrica dado que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ não é constante.

Pág. 125

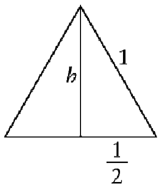
7.1 Dois triângulos consecutivos são semelhantes.

A razão das áreas é igual a $\frac{1}{4}$. Então, a razão das medidas dos lados é igual a $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Portanto, a sucessão (a_n) das áreas é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e as sucessões (l_n) dos comprimentos dos lados e (P_n) dos perímetros são progressões geométricas de razão $\frac{1}{2}$.

$P_1 = 1 \times 3 = 3$ e $r = \frac{1}{2}$

$P_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow P_n = 3 \times 2^{1-n}$

7.2 $h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2$



$h^2=1-\frac{1}{4}$

$h^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_1=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{10}=a_1\times\frac{1-r^{10}}{1-r}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)=$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)\approx 0,58$

7.3 $S_n=a_1\times\frac{1-r^n}{1-r}\Leftrightarrow S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\Leftrightarrow S_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$

8. $u_3=208$ e $u_5=3328$

$u_5=u_3\times r^{5-3}\Leftrightarrow 3328=208\times r^2\Leftrightarrow r^2=16$

Como $u_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}$ terá de ser $r>0$ pelo que $r=4$.

$u_8=u_5\times r^{8-5}\Leftrightarrow 3328\times 4^3=212992$

$S=u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}=u_8\times\frac{1-r^5}{1-r}=$

$=212\,992\times\frac{1-4^5}{1-4}=212\,992\times 341=72\,630\,272$

Pág. 126

1. $\begin{cases}u_4+u_5+u_6=63\\u_{10}+u_{12}=102\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3r+u_1+4r+u_1+5r=63\\u_1+9r+u_1+11r=102\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3u_1+12r=63\\2u_1+20r=102\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3(51-10r)+12r=63\\u_1=51-10r\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 153-30r+12r=63\Leftrightarrow 18r=90\Leftrightarrow r=5$

Resposta: (C).

2. $14+10,5+7+3,5+\ldots+(-17,5)=S$

Trata-se da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) de razão 3,5.

$a_n=14+(n-1)\times 3,5$

$-17,5=14+3,5n+3,5\Leftrightarrow 3,5n=35\Leftrightarrow n=10$

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times 10=\frac{14-17,5}{2}\times 10=-17,5$

Resposta: (D).

3. $u_1=2\wedge u_{n+1}=u_n-7,\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=-7,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}$

Logo (u_n) é monótona decrescente.

Resposta: (B).

4. $\frac{x}{6}=\frac{8,64}{x}\Leftrightarrow x^2=6\times 8,64\Leftrightarrow x^2=51,84\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{51,84}\Leftrightarrow x=\pm 7,2$

Resposta: (A).

5. $a_2=0,9$, $r=0,3$

$a_{20}=a_2\times r^{20-2}=0,9\times(0,3)^{18}=$

$=3\times(0,3)\times(0,3)^{18}=3(0,3)^{18}$

Resposta: (B).

6. $S=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{10}=$

$=2\times\frac{1-2^{10}}{1-2}=2\left(2^{10}-1\right)=2\times 1023=2046$

Resposta: (B).

7. Progressão aritmética (c_n) de razão 500 sendo:

$c_1=5500$

$c_n=50000\Leftrightarrow 5500+(n-1)\times 500=50000\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 55+5n-5=500\Leftrightarrow 5n=450\Leftrightarrow n=90$

Resposta: (C).

8. (v_n) é uma progressão geométrica de razão $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

$v_1=510\times\frac{3}{4}=382,5$

$v_{10}=v_1\times r^9=382,5\times\left(\frac{3}{4}\right)^9\approx 28,72$

Resposta: (A).

Pág. 127

1.1 $u_3 = 90$; $u_6 = 2430$; (u_n) é uma p. g.

$u_n = u_k \times r^{n-k}$

$u_6 = u_3 \times r^{6-3} \Leftrightarrow 2430 = 90 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$

$u_1 = u_3 \times r^{1-3} = 90 \times 3^{-2} = 10$

$u_1 = 10$ e $r = 3$.

1.2 $S_{10} = u_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 10 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 5\left(3^{10}-1\right) = 295\ 240$.

2. $u_2 = 24$ e $u_6 = 384$. (u_n) é uma progressão geométrica (p. g.)

2.1 $u_n = u_k \times r^{n-k}$

$u_6 = u_2 \times r^{6-2} \Leftrightarrow 384 = 24 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 16 \Leftrightarrow r = -2 \vee r = 2$

$u_1 = u_2 \times r^{-1}$

Se $r = 2$, $u_1 = \frac{24}{2} = 12$.

Se $r = -2$, $u_1 = \frac{24}{-2} = -12$.

$u_1 = 12$ e $r = 2$ ou $u_1 = -12$ e $r = -2$.

2.2 $S_{10} = 12 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 12\left(2^{10}-1\right) = 12\ 276$

Ou

$S_{10} = -12 \times \frac{1-(-2)^{10}}{1+2} = -4\left(1-2^{10}\right) = 4092$

Se $u_1 = 12$, $S_{10} = 12\ 276$; se $u_1 = -12$, $S_{10} = 4092$.

3. (a_n) é uma p. g.; $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{\pi}{2}$.

3.1 $a_{10} = a_1 \times r^9 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = \frac{\pi^{10}}{1024}$.

3.2 $S_{10} = \frac{\pi}{2} \frac{1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}}{1-\frac{\pi}{2}} \approx 248{,}92$

4.1 $u_n = 1 - \frac{1}{n}$; $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

(A) e (C) são falsas. (B) é verdadeira.

4.2 $u_n = 2^{n+1}$

$u_{2n} = 2^{2n+1}$; $u_{3n} = 2^{3n+1}$; $u_{5n} = 2^{5n+1}$

(A) e (B) são falsas. (C) é verdadeira.

4.3 $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$v_2 = 2\, v_1 + 3$

$v_{2n-1} = 2v_{2n-1-1} + 3 = 2v_{2n-2} + 3$

(A) e (B) são falsas.

4.4 $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{8}{5} v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3: (A) é verdadeira.

A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{5}$: (B) é falsa.

4.5 $a_n = a_k r^{n-k}$

$a_n = a_2 \times r^{n-2} = 3 \times r^{n-2}$

A afirmação é verdadeira.

4.6 A sucessão (u_n) definida por $u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma progressão geométrica estritamente crescente e

$u_n < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$u_n : -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

(A) e (B) são falsas.

5. $x - r$, x, $x + r$

$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x-r) \times x \times (x+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (1-r) \times 1 (1+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 - r^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ r = -2 \end{cases}$

$1 - 2 = -1$

$1 + 2 = 3$

Os números são – 1, 1 e 3.

6. 1, 3, 9, …

$u_1 = 3$, $r = 3$, (u_n) é uma progressão geométrica

10	20	30	40	50	60	70
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

$$S_7 = 3\times\frac{1-3^7}{1-3} = 3\times\frac{-2186}{-2} = 3279$$

$1 + S_7 = 1 + 3279 = 3280$

7. **1.ª hipótese:**

$20 \times 50 = 1000$

2.ª hipótese:

$a_1 = 8$ e $r = 5$ sendo (a_n) uma p. a.

$a_{20} = a_1 + 19r = 8 + 19 \times 5 = 103$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\times 20 = \frac{8+103}{2}\times 20 = 1110$$

3.ª hipótese:

$a_1 = \frac{0,2}{100} = 0,002$ e $r = 2$ sendo (a_n) uma p. g.

$$S_{20} = a_1\times\frac{1-r^{20}}{1-r} = 0,002\times\frac{1-2^{20}}{1-2} = 0,002\left(2^{20}-1\right) =$$

$= 2097,15$

A melhor hipótese é a terceira (2097,15 dólares) e a pior é a primeira (1000 dólares).

Pág. 132

1. Por exemplo:

1.1 $u_n = (n-9)^2$ **1.2** $u_n = -(n-4)^2$

1.3 $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ **1.4** $u_n = 4 + \frac{1}{n}$

Pág. 133

2. $a_n = 8n + (-1)^n 8n$

2.1 $a_1 = 8 - 8 = 0$; $a_2 = 16 + 16 = 32$; $a_3 = 24 - 24 = 0$; $a_4 = 32 + 32 = 64$; $a_5 = 40 - 40 = 0$; $a_6 = 48 + 48 = 96$.

2.2 Por exemplo:

$$b_n = a_{2n} = 8(2n) + (-1)^{2n}\times 8(2n) = 16n + 16n = 32n$$

$$c_n = a_{2n-1} = 8(2n-1) + (-1)^{2n-1}\times 8(2n-1) =$$

$$= 8(2n-1) - 8(2n-1) = 0$$

$b_n = 32n$ e $c_n = 0$ são subsucessões de (a_n).

2.3 Não. Todos os termos de ordem ímpar são nulos.

3.1 $\lim a_n = \lim(n+1) = +\infty$

3.2 $\lim d_n = \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ porque $n+1 \to +\infty$.

3.3 $\lim g_n = \lim\left(\frac{1}{3n+2}\right) = 0$ porque $3n+2 \to +\infty$.

Pág. 135

4. $a_n = \frac{1-n}{2n}$

4.1 $a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} =$

$$= \frac{-n}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n^2 - (1-n)(n+1)}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{-n^2 - 1 + n^2}{2n(n+1)} = \frac{-1}{2n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ é monótona decrescente.

4.2 $a_n = \frac{1-n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$

$$0 < \frac{1}{n} \le 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \le 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$-\frac{1}{2} < a_n \le 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é limitada.

4.3 (a_n) é convergente porque toda a sucessão monótona é limitada e convergente.

Pág. 137

5. $a_n \to -3$

$$\lim\left(2a_n - a_n^2\right) = 2\lim a_n - \left(\lim a_n\right)^2 =$$

$$= 2\times(-3) - (-3)^2 = -6 - 9 = -15$$

6. $a_n \to -1$ e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n \to \frac{1}{3}$ e $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

6.1 $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

6.2 $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

6.3 $\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = (-1)\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

6.4 $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{-1}{\frac{1}{3}}=-3$

6.5 $\lim\left(\frac{a_n+b_n}{a_n}\right)^3=\left(\lim\frac{a_n+b_n}{a_n}\right)^3=\left(\frac{\lim(a_n+b_n)}{\lim a_n}\right)^3=$

$=\left(\frac{\lim a_n+\lim b_n}{-1}\right)^3=\left(-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

Pág. 138

7. $\lim\sqrt[3]{\frac{2n+1}{n}}=\sqrt[3]{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\sqrt[3]{2}$

Pág. 139

8.1 $u_n=\frac{1+\sin(n)}{n}$

$-1\le\sin(n)\le 1, \forall n\in\mathbb{N}$

$0\le 1+\sin(n)\le 2, \forall n\in\mathbb{N}$

$0\le\frac{1+\sin(n)}{n}\le\frac{2}{n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$\begin{cases}0\le u_n\le\frac{2}{n}\\ \lim 0=\lim\frac{2}{n}=0\end{cases}\Rightarrow \lim u_n=0$$

8.2 $v_n=\left(\frac{n+\cos(2n)}{2n}\right)^2$

$-1\le\cos(2n)\le 1, \forall n\in\mathbb{N}$

$n-1\le n+\cos(2n)\le n+1, \forall n\in\mathbb{N}$

$\frac{n-1}{2n}\le\frac{n+\cos(2n)}{2n}\le\frac{n+1}{2n}, \forall n\in\mathbb{N}$

$\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\le\left(\frac{n+\cos(2n)}{2n}\right)^2\le\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2, \forall n\in\mathbb{N}$

$\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\le v_n\le\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2, \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2=\left[\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\lim\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2=\left[\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\begin{cases}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\le v_n\le\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2, \forall n\in\mathbb{N}\\ \lim\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2=\lim\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2\end{cases}\Rightarrow \lim v_n=\frac{1}{4}$$

Pág. 141

9.1 $\lim[-7(-1+3n)]=-7\times(+\infty)=-\infty$

9.2 $\lim[-4(2-7n)]=-4\times(-\infty)=+\infty$

9.3 $\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(1-n)\right]=(1+0)\times(+\infty)=-\infty$

9.4 $\lim\frac{7}{1-2n}=\frac{7}{-\infty}=0$

9.5 $\lim\frac{-4}{1+n}=\frac{-4}{\infty}=0$

9.6 $\lim\left[\left(n\times\frac{1}{n}\right)\times(n-1)\right]=\lim[1\times(n-1)]=+\infty$

9.7 $\lim\left[\left(n^2\times\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{3}n\right)\right]=$

$=\lim\left[n\left(1-\frac{1}{3}n\right)\right]=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

Pág. 142

10.1 $\lim a_n=\lim(1-n)=-\infty$

10.2 $\lim a_n=\lim(n-3)=+\infty$

10.3 $\lim a_n=\lim\left(\frac{1-n}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{n}-1\right)=0-1=-1$

10.4 $\lim a_n=\lim\left(\frac{1-n}{n}\right)^2=\left[\lim\left(\frac{1}{n}-1\right)\right]^2=(0-1)^2=1$

10.5 $\lim a_n=\lim\frac{2}{n+1}=\frac{2}{\infty}=0$

10.6 $\lim an=\lim\frac{2n+3}{4n}=\lim\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4n}\right)=$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{\infty}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

10.7 $\lim a_n=\lim\left(\frac{n^2}{n^3}-\frac{1}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=\lim 0=0$

10.8 $\lim a_n=\lim\left[(n+1)^2+n^3\right]=(+\infty)^2+(+\infty)^3=+\infty$

Pág. 144

11.1 $\lim \frac{n^2+1}{3n^2-2} = \lim \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$

11.2 $\lim \frac{1-n}{n^2+1} = \lim \frac{-n}{n^2} = \lim \frac{-1}{n} = 0$

11.3 $\lim \frac{-n^2+3n}{n^2+1} = \lim \frac{-n^2}{n^2} = -1$

11.4 $\lim \frac{n^5+3n^3+5n}{1-n^3} = \lim \frac{n^5}{-n^3} = \lim\left(-n^2\right) = -\infty$

11.5 $\lim\left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+3}{2n}\right) = \lim \frac{n+1}{n} - \lim \frac{n+3}{2n} =$

$= \lim \frac{n}{2n} - \lim \frac{n}{2n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

11.6 $\lim\left(\frac{1}{n} + \frac{n^3+5}{n^2}\right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{n^3}{n^2} =$

$= 0 + \lim(n) = 0 + \infty = +\infty$

12.1 $\lim \sqrt{\frac{n^2+3}{4n^2+1}} = \sqrt{\lim \frac{n^2+3}{4n^2+1}} = \sqrt{\lim \frac{n^2}{4n^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

12.2 $\lim \frac{\sqrt{n+1}+n}{n} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n}{n} =$

$= \lim \frac{n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n}{n} = \lim \frac{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n} =$

$\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right) = \sqrt{0+0}+1 = 1$

Pág. 145

13. $u_n = \sqrt{2n+3} \to +\infty$

$v_n = \frac{1}{2n+1} \to 0$

$w_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

13.1 $\lim\left(u_n \times v_n\right) = \lim\left(\sqrt{2n+3} \times \frac{1}{2n+1}\right) =$

$= \lim \frac{\sqrt{2n+3}}{2n+1} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} =$

$= \lim \frac{n\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{0+0}}{2+0} = 0$

13.2 $\lim \frac{v_n}{w_n} = \lim \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+2}+n}{4n+2} =$

$= \lim \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}+n}{4n+2} = \lim \frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+n}{4n+2} =$

$= \lim \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1\right)}{n\left(4+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{4+0} = 0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Pág. 146

14.1 $\lim\left(-2n^3+n^2+1\right) = \lim\left(-2n^3\right) = -\infty$

14.2 $\lim\left(n^8-n^5\right) = \lim\left(n^8\right) = +\infty$

14.3 $\lim\left(\sqrt{n^2+2}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+2}+n} =$

$= \lim \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{2}{+\infty} = 0$

14.4 $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$

$= \lim \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} =$

$= \lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \lim \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$

14.5 $\lim\left(n-\sqrt{n^2+1}\right) = \lim \frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}{n+\sqrt{n^2+1}} =$

$= \lim \frac{n^2-\left(n^2+1\right)}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{\infty} = 0$

14.6 $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right) =$

$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} =$

$= \lim \frac{n^2+n-\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} =$

$$= \lim \frac{n-1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim \frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

Pág. 149

15.1 $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right] =$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \times \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \mathrm{e} \times 1^{-1} = \mathrm{e}$$

15.2 $\lim \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n} = \lim \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3} =$

$$= \lim \left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3}\right] =$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \times \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3} =$$

$$= \mathrm{e} \times 1^{-3} = \mathrm{e}$$

15.3 $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$

15.4 $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n} = \lim \left(1+\frac{-3}{-3n}\right)^{-3n} = \mathrm{e}^{-3} = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$

15.5 $\lim \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

15.6 $\lim \left(1+\frac{4}{3n}\right)^{n} = \lim \left(1+\frac{\frac{4}{3}}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^4} = \mathrm{e}\sqrt[3]{\mathrm{e}}$

15.7 $\lim \left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2} = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}\right)^{n^2} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}} =$

$$= \frac{\lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\lim \left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^5} = \mathrm{e}^{-4}$$

15.8 $\lim \left(\frac{5n-2}{5n+3}\right)^{3n} = \lim \left[\left(\frac{1-\frac{2}{5n}}{1+\frac{3}{5n}}\right)^{n}\right]^3 =$

$$= \left[\lim \frac{\left(1-\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n}\right]^3 = \left[\frac{\lim \left(1-\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n}\right]^3 =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}}{\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}}\right)^3$$

$$= \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^3 = \mathrm{e}^{-3}$$

Pág. 150

1. $500 + (-1)^n \times n = \begin{cases} 500 - n \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 500 + n \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$

$\lim(500-n) = -\infty$

$\lim(500+n) = +\infty$

Não existe limite. Logo, a sucessão é divergente.

Resposta: (C).

2. $\lim a_n = \lim \frac{1+n^2}{1-3n^2} = \lim \frac{n^2}{-3n^2} = -\frac{1}{3}$

Resposta: (A).

3. $b_n = \frac{(-1)^n \times 3}{n+2} - 7$

$$b_n = \begin{cases} \frac{-3}{n+2} - 7 \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{3}{n+2} - 7 \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$\lim \left(\frac{-3}{n+2} - 7\right) = 0 - 7 = -7$

$\lim \left(\frac{3}{n+2} - 7\right) = 0 - 7 = -7$

Portanto, $\lim b_n = -7$

Resposta: (D).

4. Por exemplo, a sucessão (u_n) definida por

$u_n = n + (-1)^n \times 10$ tende para $+\infty$ e não é monótona.

Resposta: (A).

5. Toda a sucessão convergente é limitada.

Resposta: (B).

6. $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ sendo

$u_1 = 1$

$u_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4^{1-n}$

Resposta: (D).

7. Seja (a_n) a sucessão dos comprimentos dos arcos.

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

$$a_1 = \frac{2\pi \times \frac{1}{\pi}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = a_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Resposta: (C).

Pág. 151

1.

1.1 $c_1 = 3,\ c_2 = 6 \times \frac{1}{2} = 3,\ c_3 = 12 \times \frac{1}{4} = 3,\ c_5 = 24 \times \frac{1}{8} = 3,$

$c_n = 3;\ \lim c_n = 3$

1.2 Seja $u_n = c,\quad c \in \mathbb{R}$.

Pretende-se mostrar que:

$\forall \partial > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - c| < \partial$

Ora, $|u_n - c| = |c - c| = 0$.

Como $\partial > 0$, $|u_n - c| < \partial$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$.

2.

2.1 $$\lim \frac{1 + n - 3n^2}{8 - n^2} = \lim \frac{-3n^2}{-n^2} = 3$$

2.2 $$\lim \left(\frac{1 + n^4}{\sqrt{n^8 + 1}} + 3 \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^4\left(\frac{1}{n^4} + 1\right)}{\sqrt{n^8\left(1 + \frac{1}{n^8}\right)}} + \lim 3 =$$

$$= \lim \frac{n^4\left(\frac{1}{n^4} + 1\right)}{n^4\sqrt{1 + \frac{1}{n^8}}} + 3 = \frac{0 + 1}{\sqrt{1 + 0}} + 3 = 1 + 3 = 4$$

2.3 $$\lim \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2 + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim \frac{n^2\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\sqrt{0 + 0}}{1 + 0} = 0$$

2.4 $$\lim \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \overset{\infty - \infty}{=}$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} =$$

$$= \lim \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2.5 $$\lim \left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 2} \right) \overset{\infty - \infty}{=}$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 2}\right)\left(\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}\right)}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} =$$

$$= \lim \frac{n^3 + 1 - \left(n^2 + 2\right)}{\sqrt{n^6\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}\right)} + \sqrt{n^6\left(\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^6}\right)}} =$$

$$= \lim \frac{n^3 - n^2 + 3}{n^3\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + n^3\sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}} =$$

$$= \lim \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}\right)} =$$

$$= \lim \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}} = = \frac{1 - 0 + 0}{0^+ + 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2.6 $$\lim \frac{\sqrt{n^2 + n + 3}}{n + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + 3}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim \frac{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 3}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{3}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1 + 0} + 0}{1 + 0} = 1$$

2.7 $$\lim \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \lim \frac{n \pm 1}{n \mp 1} = \lim \frac{n}{n} = 1$$

2.8 $\lim \frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{4^n+3^n} = \lim \frac{4^n \times 4 + 3^n \times 3}{4^n+3^n} =$

$$= \lim \frac{4^n\left(4+\left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3\right)}{4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \frac{4+0\times 3}{1+0} = 4$$

3. $t_n = n + (-1)^{n+1}(n+3) = \begin{cases} n+(n+3) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n-(n+3) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$$t_n = \begin{cases} 2n+3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

(t_n) não é limitada superiormente dado que existe uma subsucessão de (t_n) que é um infinitamente grande positivo $(2n+3 \to +\infty)$.

(t_n) não é um infinitamente grande porque a subsucessão dos termos de ordem par é convergente.

3.2 Por exemplo, se $s_n = \frac{1}{n^2+2}$:

$$s_n \times t_n = \frac{n+(-1)^{n+1}(n+3)}{n^2+2}.$$

Se n é par, $s_n \times t_n = \frac{3}{n^2+2}$ e $\lim(s_n \times t_n) = 0$

Se n é ímpar, $s_n \times t_n = \frac{2n+3}{n^2+2}$ e

$$\lim(s_n \times t_n) = \lim \frac{2n+3}{n^2+2} =$$

$$= \lim \frac{2n}{n^2} = \lim \frac{2}{n} = 0$$

Então, $\lim(s_n \times t_n) = 0$.

4.1

a) $p_1 = \frac{1}{2} \times 2\pi R_1 = \pi R$

$$p_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi R_2 = \frac{\pi R}{2}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \times 2\pi R_3 = \pi \frac{R}{4}$$

b) (p_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$p_n = p_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \pi R\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \pi R\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c) $\lim p_n = \lim\left[\pi R\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \pi R \times 0 = 0$.

4.2

a) $a_1 = \frac{\pi R^2}{2}$

$$a_2 = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{8}$$

$$a_3 = \frac{\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{R^2}{16} = \frac{\pi R^2}{32}$$

b) (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\pi R^2}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \times 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$a_n = 2\pi R^2\left(\frac{1}{4}\right)^n = \pi R^2 \times 2 \times 2^{-2n} = \pi R^2 \times 2^{1-2n}.$$

c) $\lim a_n = \lim\left[2\pi R^2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 2\pi R^2 \times 0 = 0$

A área de cada um dos semicírculos tende para zero à medida que o seu número aumenta.