PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

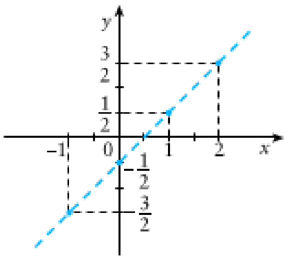
Capítulo 3

Pág. 45

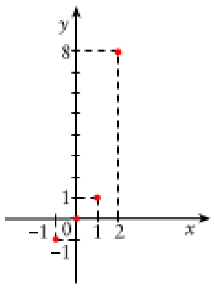
1.1 **a)**

x	$y = f(x)$
-1	$-\frac{3}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$

b)



1.2 **a)**



b) $g(x) = x^3$ com $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Pág. 48

2.1 Mínimo: $f(-3) = -3$

Máximo: $f(-6) = 7$

2.2 *C. S.* = $\{-6\}$.

2.3 *C. S.* = $\{-3\}$.

Pág. 49

3.1

$f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$

3.2

$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-1}$

3.3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

3.4

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Pág. 51

4.1 $f(x) = |x|$

f não é injectiva. Por exemplo, $f(-1) = f(1)$.

4.2 $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} \neq \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_g$, *g* é injectiva.

4.3 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

f não é injectiva. Por exemplo $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3 = f(2)$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}^+$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} = \dfrac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$

Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ temos que $x_1 = x_2$. Então:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

Pág. 52

6. Por exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

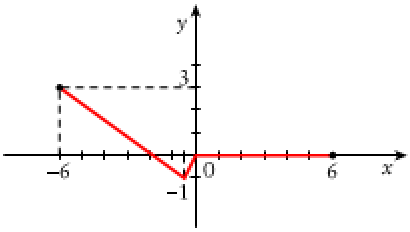
Pág. 54

1. Resposta: (C).

2. Resposta: (C).

3. Resposta: (D).

4.



Resposta: (D).

5. Resposta: (D).

6. Resposta: (B).

Pág. 55

1.1 $D_g =]-\infty, 8]$

1.2 $D'_g = [-2, +\infty[$

1.3 – 2

1.4 – 2, 4 e 8.

1.5 – 3 e 1.

1.6 [– 2, 0] e [4, 6].

1.7 $]-\infty, -2]$, [0, 4] e [6, 8].

1.8 1 e – 1.

1.9 0 e 6.

1.10 – 2.

1.11 – 3, 4 e 8.

2.1

a) $f(-1) = 3$; $f(2) = -1$. **b)** 0

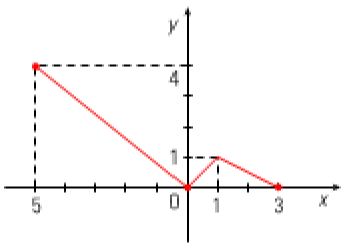
c) – 3 e 2. **d)** – 3,5 ; – 2 e 1.

2.2

x	– 4		– 3		–1,2		–0,2		2
$f(x)$	1	↘	– 1	↗	3	→	3	↘	– 1

Intervalos de monotonia:
f é crescente em [–3; –1,2], é decrescente em [–4, –3] e em [– 0,2 ; 2] e é constante em [– 1,2 ; –0,2].

3.1 Por exemplo:



3.2 0 e 3.

3.3 [– 5, 3].

3.4 0 e 3.

4.1 3 h, 9 h, 15 h e 21 h.

4.2 10 min, 0 h, 12 h e 24 h.

4.3 6 min, 6 h e 18 h.

4.4 **a)** $D_f' = [6, 10]$

b) f é estritamente crescente em [6, 12] e em [18, 24].
f é estritamente decrescente em [0, 6] e em [12, 18].

c)

x	0		6		12		18		24
$f(x)$	10	↘	6	↗	10	↘	6	↗	10

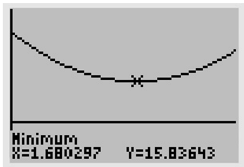
Pág. 58

1.1. $x \in]0, 3[$.

1.2. $A = A_{\text{círculo}} + A_{\text{quadrado}} = \pi x^2 + (6 - 2x)^2 = \pi x^2 + 36 - 24x + 4x^2$

$A(x) = (4 + \pi)\, x^2 - 24x + 36.$

1.3.



A área é mínima para $x \approx 1{,}68$ cm.

Pág. 59

2. $y = a(x - h)^2 + k$

$y = a(x - 1)^2 - 4$

$5 = a(-2 - 1)^2 - 4$

$5 = 9a - 4 \Leftrightarrow a = 1$

$y = 1(x - 1)^2 - 4 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 4 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x - 3$

$y = x^2 - 2x - 3$

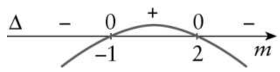
Pág. 60

1. $f(x) = mx^2 + 4x + 2m - 2$

$\Delta = 4^2 - 4m(2m-2) \Leftrightarrow \Delta = 16 - 8m^2 + 8m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = -8m^2 + 8m + 16$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m - 1 \vee m = 2$



Resposta: (B).

2.1 $x^2 + 3x + 2 = 0$

$S = -3$; $P = 2$

Resposta: (D).

2.2 $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -1$

$S = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $P = -\frac{1}{2}$

$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

Resposta: (A).

3. $x^2 - 4x + m = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m - 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4(m-1) \Leftrightarrow 16 - 4m + 4 = 20 - 4m$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 20 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Resposta: (A).

4. $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Resposta: (D).

5. $f(3,5) = 3,5$

$f(8) = -0,5\,(8-6)2 + 5,5 = -2 + 5,5 = 3,5$

Resposta: (D).

Pág. 61

1. $2x^2 + mx + 2$

$\Delta = m^2 - 4 \times 2 \times 2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = 4$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = 4$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-4,\ 4[$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

1.1 $m \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

1.2 $m \in]-4, 4[$

1.3 $m = -4 \vee m = 4$

2. $(m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(m-1)(1-m) \Leftrightarrow \Delta = 4 + 4(m-1)^2$

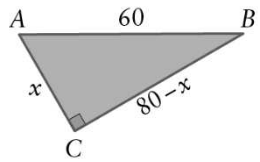
$\Delta > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação

$x_1 \times x_2 = \frac{1-m}{m-1} = -1 < 0$

logo, x_1 e x_2 têm sinais contrários

3.



$(80-x)^2 + x^2 = 60^2 \Leftrightarrow 6400 - 160x + x^2 + x^2 - 3600 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 160x + 2800 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 80x + 1400 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 5600}}{2} \Leftrightarrow x \approx 25,86 \vee x \approx 54,14$

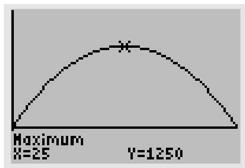
$\overline{BC} \approx 25,86$ m e $\overline{AC} \approx 54,14$ m ou vice-versa.

4.1 **a)** $2x + y$ é o comprimento da rede.

b) $100 - 2x$ é o comprimento do lado paralelo ao muro, em função do comprimento do outro lado.

c) $x\,(100 - 2x)$ é a área do rectângulo.

4.2 $A(x) = x(100 - 2x)$, $0 < x < 50$



$x = 25$; $y = 100 - 2 \times 25 = 50$

A área do terreno é máxima se as dimensões forem 25 m por 50 m.

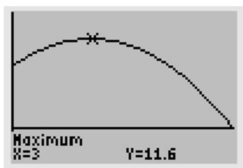
5. $h(x) = -0,4x^2 + 2,4x + 8$

5.1 $h\,(0) = 8$; 8 metros.

5.2 $h(5) = -0,4 \times 5^2 + 2,4 \times 5 + 8 = 10$

$h(5) = 10$; a 5 m, na horizontal, da linha da prancha, a atleta está a 10 metros de altura.

5.3



A altura máxima atingida pela atleta é 11,6 m.

5.4 $h(x) = 0 \Leftrightarrow -0,4x^2 + 2,4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2,4 \pm \sqrt{2,4^2 + 12,8}}{-0,8} \Rightarrow x \approx 8,39$

8,39 m

5.5 $h(x) = 10 \Leftrightarrow -0,4x^2 + 2,4x + 8 = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,4x^2 + 2,4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

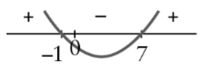
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

$x = -1 \vee x = 5$. O atleta encontrou-se a 10 m de altura quando a distância à prancha, medida na horizontal, era de 1 m ou de 5 m.

5.6 $h(x) > 5{,}2 \Leftrightarrow -0{,}4x^2 + 2{,}4x + 8 > 5{,}2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}4x^2 + 2{,}4x + 2{,}8 > 0 \Leftrightarrow$

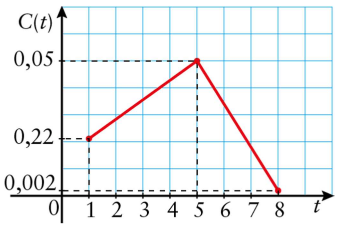
$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x \in [0,\ 7]$

A altura a qual se encontra o atleta é superior a 5,2 m enquanto a sua distância, na horizontal, à prancha for inferior a 7 m.

6.



Pág. 63

1. São funções racionais as definidas por:

1.1 $f(x) = x^2 - 3$

1.2 $g(x) = \dfrac{-x+3}{2}$

1.4 $i(x) = \dfrac{\pi x + 3}{5x + 1}$

2.1 $f(x) = \dfrac{1}{3x+3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.2 $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.3 $h(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x^3}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

2.4 $i(x) = \dfrac{2}{3x^2 - 6x + 9}$

$D_i = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 6x + 9 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Cálculos auxiliares:

$3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$. A equação é impossível.

2.5 $j(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 - 5x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 5\}$.

Cálculos auxiliares:

$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 5$

Pág. 66

3.1 $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

A recta da equação $x = -5$ é uma assimptota do gráfico de f.

3.2 $g(x) = \dfrac{1}{3 - x^2}$

$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

As rectas das equações $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ são assimptotas do gráfico de g.

3.3 $h(x) = \dfrac{9 - x}{x^2 - 81}$

$9 - x = 0 \Leftrightarrow x = 9$

$x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x = -9 \vee x = 9$

A recta da equação $x = -9$ é uma assimptota do gráfico de h.

3.4 $i(x) = \dfrac{x-3}{x-3} = 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

O gráfico de i não tem assimptotas verticais.

3.5 $j(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$

$x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

O gráfico de j não tem assimptotas verticais.

Pág. 68

4.1 $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Numerador: $A(x) = 2$

Denominador: $B(x) = x - 1$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Assimptotas vertical: recta da equação $x = 1$

Grau de $B(x)$ > grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta da equação $y = 0$.

4.2 $g(x) = \dfrac{2x}{7 - x}$

Numerador: $A(x) = 2x$

Denominador: $B(x) = -x + 7$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow -x + 7 = 0 \wedge 2x \neq 0 \Leftrightarrow x = 7$

Assimptota vertical: recta da equação $x = 7$

Grau de $B(x)$ = grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta da equação $y = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow y = -2$

4.3 $h(x) = \frac{3x}{x^2 - x - 6}$

Numerador: $A(x) = 2x$

Denominador: $B(x) = x^2 - x - 6$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \wedge 2x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

Assimptotas verticais: rectas das equações $x = -2$ e $x = 3$

Grau de $B(x)$ > grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta da equação $y = 0$.

4.4 $i(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 3x + 4}$

Numerador: $A(x) = -x^2$

Denominador: $B(x) = x^2 - 3x + 4$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \wedge -x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

O gráfico de i não tem assimptotas verticais.

Grau de $B(x)$ = grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta da equação $y = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow y = -1$.

4.5 $j(x) = \frac{x^3 - 3}{x^3}$

Numerador: $A(x) = x^3 - 3$

Denominador: $B(x) = x^3$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \wedge x^3 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$

Assimptota vertical: recta da equação $x = 0$

Grau de $B(x)$ = grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta da equação $y = \frac{1}{1} \Leftrightarrow y = 1$.

4.6 $k(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

Numerador: $A(x) = x^2$

Denominador: $B(x) = x - 1$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Assimptotas vertical: recta da equação $x = 1$

Grau de $B(x)$ < grau de $A(x)$

O gráfico de k não tem assimptotas horizontal.

Pág. 70

1. $g(x) = f(x - 1) + 5$

O gráfico de g obtém-se por uma translação do gráfico de f associado ao vector $\vec{u} = (1, 5)$.

As assimptotas sofrem o mesmo deslocamento:

$x = -1 \quad x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$

$y = 2 \quad y - 5 = -1 \Leftrightarrow y = 7$

Resposta: (A).

2. $f(x) = a + \frac{1}{x - b}$

Assimptotas do gráfico de f: $x = b$ e $y = a$.

Por observação do gráfico temos $a > 0$ e $b > 0$.

Resposta: (B).

3. $V = 2t$ sendo V em metros cúbicos e t em horas.

$2^2 \times h = 2t$

$h = \frac{t}{2}$

Resposta: (B).

4. $C(h) = \frac{50h}{h^2 + 1}, h \geq 0$

$C(7) = 7$

Resposta: (D).

5. $f(x) = \frac{x^2 - x + 6}{x - 2} = x + 1 + \frac{8}{x - 2}$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & x + 1 \\ \hline x + 6 & \\ -x + 2 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

A recta da equação $y = x + 1$ é uma assimptota do gráfico.

Resposta: (A).

6. $\frac{4}{x^3 - x} = \frac{A(x^2 - 1) + B(x^2 - x) + C(x^2 + x)}{x(x + 1)(x - 1)}$

$\frac{4}{x^3 - x} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx}{x(x^2 - 1)}$

$\frac{4}{x^3 - x} = \frac{(A + B + C)x^2 + (C - B)x - A}{x^3 - x}$

Logo,

$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ C - B = 0 \\ -A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = +4 \\ -B + C = 0 \\ A = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2C = 4 \\ B = C \\ A = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ B = 2 \\ A = -4 \end{cases}$

Resposta: (A).

Pág. 71

1.1 $P(x) = \dfrac{x}{500+x}$, $x > 0$

Assimptota horizontal: $y = 1$.

Se o número de robalos introduzidos for significativamente elevado a percentagem desta espécie tende a aproximar-se de 100%.

Assimptota vertical: Não há porque –500 é o único zero do denominador e $D_P = \mathbb{R}^+$.

1.2 $P(x) \le 0{,}2 \Leftrightarrow = \dfrac{x}{500+x} \le 0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{500+x} - 0{,}2 \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x - 0{,}2 \times 500 - 0{,}2x}{500+x} \le 0$

Como $500 + x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, temos:

$0{,}8x - 100 \le 0 \Leftrightarrow 0{,}8x \le 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \le \dfrac{100}{0{,}8} \Leftrightarrow x \le 125$

Podem ser introduzidos 125 robalos, no máximo.

2. $N(t) = \dfrac{50t + k}{t + 25}, t \ge 0$.

2.1 $N(0) = 15 \Leftrightarrow \dfrac{k}{25} = 15 \Leftrightarrow k = 375$

2.2 $N(t) = \dfrac{50t + 375}{t + 25}$

$N(10) = \dfrac{50 \times 10 + 375}{10 + 25} = 25$

É de esperar que produza 25 peças.

2.3 A recta $y = 50$ é uma assimptota horizontal do gráfico de N. Logo $b = 50$.

Com o decorrer do tempo de experiência o número de peças produzidas por hora tende a aproximar-se de 50.

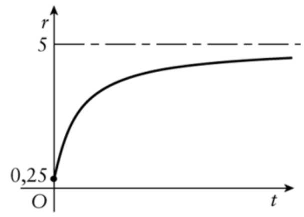
3.1 $r(t) = \dfrac{1 + 5t}{4 + t}$

$r(0) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

No momento em que a nódoa foi detectada tinha um raio de 0,25 cm.

3.2 A recta $y = 5$ é uma assimptota horizontal do gráfico da função r. Significa que com o decorrer do tempo o raio da mancha tende a aproximar-se de 5 cm.

3.3



3.4 $A = 40$ cm^2

$\pi r^2 = 40$

$r = \sqrt{\dfrac{40}{\pi}}$

$r(t) = \sqrt{\dfrac{40}{\pi}} \Leftrightarrow \dfrac{1+5t}{4+t} = \sqrt{\dfrac{40}{\pi}} \Leftrightarrow \dfrac{1+5t}{4+t} - \sqrt{\dfrac{40}{\pi}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+5t)\sqrt{\pi} - (4+t)\sqrt{40}}{4+t} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\pi} + 5\sqrt{\pi}t - 4\sqrt{40} - t\sqrt{40} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\left(5\sqrt{\pi} - \sqrt{40}\right) = 4\sqrt{40} - \sqrt{\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{4\sqrt{40} - \sqrt{\pi}}{5\sqrt{\pi} - \sqrt{40}} \Rightarrow t \approx 9{,}3$

A área da mancha atingiu 40 cm^2 cerca de 9,3 segundos após ter sido detectada.

pág.72

1.1 Não. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ e $D_g = \mathbb{R}$.

1.2 Não. $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$.

Logo, $f(x) \ne g(x)$, $\forall x \in \left]-\infty, -3\right[$.

1.3 $f(x) = \sqrt{(-2x)^2} = |-2x| = |2x| = g(x)$ e $D_f = D_g$.

As funções f e g são iguais.

1.4 As funções f e g são iguais.

Pág. 75

2.1 $f(x) = 3x$; $g(x) = x + \dfrac{1}{2}$

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$,

$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \ne 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + x + \dfrac{1}{2} = 4x + \dfrac{1}{2}$

$D_{f+g}: \mathbb{R}$

$$f+g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 4x+\frac{1}{2}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=3x-\left(x+\frac{1}{2}\right)=2x-\frac{1}{2}$$

$D_{f-g}: \mathbb{R}$

$$f-g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x-\frac{1}{2}$$

$$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=3x\left(x+\frac{1}{2}\right)=3x^2+\frac{3}{2}x$$

$D_{f\times g}=\mathbb{R}$

$$f\times g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x^2+\frac{3}{2}x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x}{x+\frac{1}{2}}=\frac{3x}{\frac{2x+1}{2}}=\frac{6x}{2x+1}$$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{6x}{2x+1}$$

2.2 $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=\dfrac{x}{x+4}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$$(f+g)(x)=\frac{x+3}{x}+\frac{x}{x+4}=$$
$$=\frac{(x+3)(x+4)+x^2}{x(x+4)}=\frac{2x^2+7x+12}{x^2+4x}$$

$D_{f+g}: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$$f+g: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x^2+7x+12}{x^2+4x}$$

$$(f-g)(x)=\frac{x+3}{x}-\frac{x}{x+4}=\frac{(x+3)(x+4)-x^2}{x(x+4)}=\frac{7x+12}{x^2+4x}$$

$D_{f-g}: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$$f-g: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{7x+12}{x^2+4x}$$

$$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x+3}{x}\times\frac{x}{x+4}=\frac{x+3}{x+4}$$

$D_{f\times g}: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$$f\times g: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x+3}{x+4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x+4}}=\frac{(x+3)(x+4)}{x^2}=\frac{x^2+7x+12}{x^2}$$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2+7x+12}{x^2}$$

2.3 $f(x)=\dfrac{2x-6}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,3\}$

$$(f+g)(x)=\frac{2x-6}{x}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{(2x-6)(x-3)+x(x+1)}{x(x-3)}=$$
$$=\frac{3x^2-11x+18}{x^2-3x}$$

$D_{f+g}=\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

$$f+g: \mathbb{R}\setminus\{0,3\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3x^2-11x+18}{x^2-3x}$$

$$(f-g)(x)=\frac{2x-6}{x}-\frac{x}{x-3}=\frac{(2x-6)(x-3)-x^2}{x(x-3)}=$$
$$=\frac{x^2-13x+18}{x^2-3x}$$

$D_{f-g}: \mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

$$f-g: \mathbb{R}\setminus\{0,3\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2-13x+18}{x^2-3x}$$

$$(fg)(x)=\frac{2x-6}{x}\times\frac{x+1}{x-3}=\frac{2(x-3)(x+1)}{x(x-3)}=\frac{2x+2}{x}$$

$D_{f\times g}: \mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

$$f\times g: \mathbb{R}\setminus\{0,3\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x+2}{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{2x-6}{x}}{\frac{x+1}{x-3}}=\frac{2(x-3)(x-3)}{x(x+1)}=$$
$$=\frac{2x^2-12x+18}{x^2+x}$$

$D_{\frac{f}{g}}: \mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R}\setminus\{-1,0,3\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x^2-12x+18}{x^2+x}$$

Pág. 78

3.1 **a)** $f(x)=x-1$ e $g(x)=2x+\frac{1}{2}$

$$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f\left(-4+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=f\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{7}{2}-1=-\frac{9}{2}$$

$$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(-2-1)=g(-3)=-6+\frac{1}{2}=-\frac{11}{2}$$

b) $f(x)=\sqrt{x^2}$ e $g(x)=\frac{1}{x+1}$

$$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f\left(\frac{1}{-2+1}\right)=$$
$$=f(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1$$

$$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g\left(\sqrt{(-2)^2}\right)=g(2)=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

3.2 **a)** $f(x)=x^2+1,\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=2x-2,\ D_g=\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-2)=(2x-2)^2+1=4x^2-8x+5$$

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=$$
$$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge(2x-2)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$f\circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 4x^2-8x+5$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=2(x^2+1)-2=2x^2$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=$$
$$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge x^2+1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$g\circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x^2$$

b) $f(x)=\frac{1}{x-4}, D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$g(x)=\sqrt{x}, D_g=\mathbb{R}_0^+$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=$$
$$=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\wedge\sqrt{x}\neq 4\}=\mathbb{R}_0^+\setminus\{16\}$$

Cálculo auxiliar:

$\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$

$$f\circ g: \mathbb{R}_0^+\setminus\{16\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x-4}\right)=\sqrt{\frac{1}{x-4}}$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 4\wedge\frac{1}{x-4}\geq 0\right\}=]4,+\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$\frac{1}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow x-4>0 \Leftrightarrow x>4$

$$g\circ f:]4,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-4}}$$

c)

$f(x)=\frac{1}{x}, D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=\sqrt{x+1}, D_g=[-1,+\infty[$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq -1 \wedge \sqrt{x+1}\neq 0\right\}=]-1,+\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$f\circ g:]-1,+\infty[\;\to\; \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\frac{1}{x}+1}$$

$$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0 \wedge \frac{1}{x}\geq -1\right\}=]-\infty,-1]\cup]4,+\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{x}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x}\geq 0$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1+x}{x}$	$+$	0	$-$	s.s.	$+$

$$g\circ f:]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[\;\to\; \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}+1}$$

3.3 $f(x)=x-2;\ D_f=\mathbb{R}$

Seja $g(x)=ax+b, D_g=\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x), \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(g(x))=g(f(x)), \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(ax+b)=g(x-2), \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax+b-2=a(x-2)+b, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax+b-2=ax-2a+b, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=a \\ b-2=-2a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=1$$

Qualquer função g definida por $g(x)=x+b,\ b\in\mathbb{R}$ é permutável com f.

4.1 $f(x)=-x+1,\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\pi x+3,\ D_g=\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\pi x+3)=-(\pi x+3)+1=-\pi x-2$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+1)=$$

$$=\pi(x-1)+3=-\pi x+\pi+3$$

Embora $D_{f\circ g}=D_{g\circ f}=\mathbb{R}$

$$\exists x\in\mathbb{R}: (f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$$

f e g não são permutáveis.

4.2 $f(x)=\sqrt{x}, D_f=[0,+\infty[$

$g(x)=\frac{1}{x-3},\ D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 3 \wedge \frac{1}{x-3}\geq 0\right\}=]3,+\infty[$$

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0 \wedge \sqrt{x}\neq 3\right\}=[0,+\infty[\setminus\{9\}$$

$D_{f\circ g}\neq D_{g\circ f} \Rightarrow$ f e g não são permutáveis.

Pág. 79

5. Por exemplo:

$f(x)=\sqrt{x-2}, D_f=[2,+\infty[$

$g(x)=1-|x|,\ D_g=\mathbb{R}$

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R} \wedge 1-|x|\geq 2\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: |x|\leq -1\right\}=\varnothing$$

Sendo $D_{f\circ g}=\varnothing$, $f\circ g$ não existe.

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq 2 \wedge \sqrt{x-2}\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq 2\right\}=[2,+\infty[$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x-2}\right)=1-\left|\sqrt{x-2}\right|$$

$$g\circ f: [2,+\infty[\;\to\; \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1-\left|\sqrt{x-2}\right|$$

Pág. 81

6.1 $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{6}{x}=y$$

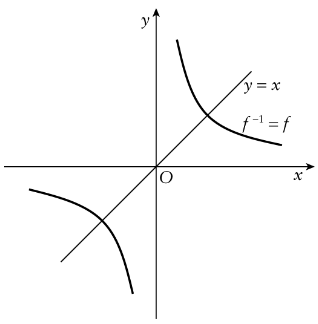
$$x=\frac{6}{y} \Leftrightarrow xy=6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{x}$$

$f^{-1}(x)=\frac{6}{x}$

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto \frac{6}{x}$



6.2 $g(x)=6x+1$

$D_g=\mathbb{R}$

$g(x)=y \Leftrightarrow 6x+1=y$

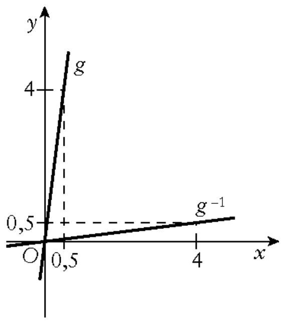
$6y+1=x \Leftrightarrow 6y=x-1 \Leftrightarrow y=\frac{x-1}{6}$

$g^{-1}(x)=\frac{x-1}{6}$

$D_{g^{-1}}=\mathbb{R}$

$g^{-1}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto \frac{x-1}{6}$



6.3 $h(x)=\frac{2}{x-3}$

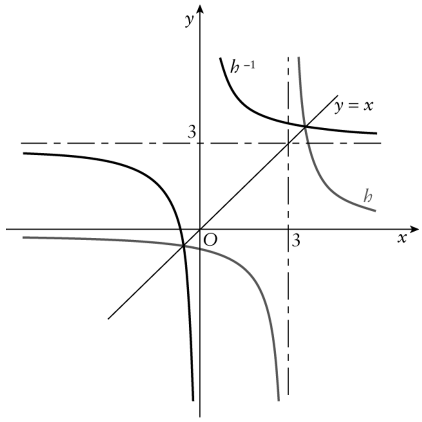
$D_h=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$h(x)=y \Leftrightarrow \frac{2}{x-3}=y$

$\frac{2}{y-3}=x \Leftrightarrow 2=xy-3x \Leftrightarrow xy=2+3x \Leftrightarrow y=\frac{2+3x}{x}$

$h^{-1}(x)=\frac{2+3x}{x}$

$D_{h^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$



Pág. 82

1.

x	$-\infty$	0		a		b	$+\infty$
$f(x)$	+	0	–		+	+	+
$g(x)$	–	–	–	–	–	0	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	–	0	+	s.s.	–	s.s.	+

$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow x\in[0,\ a[\cup]b,\ +\infty[$

Pode ser a = 1 e b = 2.

Resposta: (D).

2.1 $f(1)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=1$

$f(-2)=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=-2$

$f^{-1}(0)-f^{-1}(2)=1+2=3$

Resposta: (C).

2.2 $g(x)=1+\frac{2}{x-3}$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(-1)=1+\frac{2}{-1-3}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Resposta: (A).

3.1 $(g\circ f)(29)=g(f(29))=g\left(\sqrt[3]{-2+29}\right)=g(3)=2$

Resposta: (C).

3.2 $f(x)=-2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-2+x}=-2 \Leftrightarrow -2+x=(-2)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-8+2 \Leftrightarrow x=-6$

$f(-6)=-2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2)=-6$

$f^{-1}(-2)+f(-6)=-6+\sqrt[3]{-2-6}$

$=-6+\sqrt[3]{-8}=-6-2=-8$

Resposta: (B).

4. $D_f = \mathbb{R}$ e f é injectiva.

Se f é injectiva a equação $f(x) = 3$ tem, no máximo, uma solução. Como a é solução da equação, esta é única.

Resposta: (D).

5. $f(-1) \neq g(-1) \Leftrightarrow f(-1) - g(-1) \neq 0 \Leftrightarrow (f-g)(-1) \neq 0$

– 1 não é zero de $f - g$.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$$

1 é zero de f. Logo, não é zero de $\frac{g}{f}$.

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 0 \neq -1$$

Em $]0, 4[$, g tem dois zeros e f tem um, todos diferentes. Logo, $f \times g$ tem três zeros.

Resposta: (D).

Pág. 83

1. $a(t) = \dfrac{11t+6}{t+1}, t \geq 0;\ \ b(t) = \dfrac{t+9}{t+3}, t \geq 0$

1.1 No início de 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A, é dado por $a(0) = 6$. Logo, no início de 2009 existiam 6000 animais da espécie A.

No início de 2010, o número de animais, em milhares, da espécie A era dado por $a(1) = 8{,}5$ pelo que havia, no início de 2010, 8500 animais da espécie A.

Logo, desde o início do ano de 2009 até ao início do ano de 2010, o número de animais da espécie A aumentou 2500.

Como, nesse intervalo de tempo, morreram 500 animais da espécie A, podemos concluir que no intervalo de tempo em causa, nasceram 3000 animais da espécie A (2500 + 500 = 3000).

1.2 $a(t) = \dfrac{11t+6}{t+1} = 11 - \dfrac{5}{t+1}$

$$\begin{array}{rr|l} & 11\,t + 6 & t+1 \\ \cline{3-3} - & 11\,t - 11 & 11 \\ \hline & -5 & \end{array}$$

A recta da equação $y = 11$ é uma assimptota horizontal do gráfico de a.

$b(t) = \dfrac{t+9}{t+3} = 1 + \dfrac{6}{t+3}$

$$\begin{array}{rr|l} & t + 9 & t+3 \\ \cline{3-3} - & t - 3 & 1 \\ \hline & 6 & \end{array}$$

A recta da equação $y = 1$ é uma assimptota horizontal do gráfico de b. Podemos então concluir que, com o decorrer do tempo o número de animais da espécie A tende para 11 000 enquanto que o número de animais da espécie B tende para 1000.

Logo, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B, com o decorrer do tempo, tende para 10 000.

1.3 $(a \circ b)(t) = a(b(t)) = a\left(\dfrac{t+9}{t+3}\right) = \dfrac{11\left(\frac{t+9}{t+3}\right)+6}{\frac{t+9}{t+3}+1} =$

$$= \frac{\frac{11t+99}{t+3}+6}{\frac{t+9+t+3}{t+3}} = \frac{\frac{11t+99+6t+18}{t+3}}{\frac{2t+12}{t+3}} = \frac{17t+117}{2t+12}$$

$D_{a \circ b} = \{t \in \mathbb{R} : t \in D_b \wedge b(t) \in D_a\} =$

$= \left\{t \in \mathbb{R} : t \neq -3 \wedge \dfrac{t+9}{t+3} \neq -1\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{t+9}{t+3} = -1 \Leftrightarrow \frac{t+9}{t+3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t+9+t+3}{t+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t+12}{t+3} = 0 \Leftrightarrow 2t+12 = 0 \wedge t \neq -3 \Leftrightarrow t = -6$$

$(a \circ b)(t) = \dfrac{17t+117}{2t+12}; D_{aob} = \mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}$.

1.4 Se $x \neq -1$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{11x+6}{x+1} = y$$

Se $y \neq -1$

$$\frac{11y+6}{y+1} = x \Leftrightarrow 11y + 6 = xy + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11y - xy = x - 6 \Leftrightarrow y(11-x) = x - 6 \Leftrightarrow y = \frac{x-6}{11-x}$$

$$f(-1) = 11 \Leftrightarrow f^{-1}(11) = -1$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ com } f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-6}{11-x} & \text{se } x \neq 11 \\ -1 & \text{se } x = 11 \end{cases}$$

2.1 Recta OC:

$m = \dfrac{4}{3}$; $\ y = \dfrac{4}{3}x$

$C\left(x, \dfrac{4}{3}x\right)$; $\overline{OB} = 12$

A altura do triângulo $[OBC]$ relativa ao vértice C é a ordenada deste ponto, ou seja, é igual a $\dfrac{4}{3}x$.

$$A_{[OBC]} = \frac{12\times\frac{4}{3}x}{2} = 6\times\frac{4}{3}x = 8x$$

$A(x) = 8x$

2.2 $\overline{OB} = 12$

$$\overline{OC} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}|x| = \frac{5}{3}x \qquad (x \geq 0)$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x-12)^2 + \left(\frac{4}{3}x - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 24x + 144 + \frac{16}{9}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$$

$$P(x) = 12 + \frac{5}{3}x + \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$$

3. $N(t) = T^2 + 125T + 100, 20 \leq T \leq 32$

$T(h) = 4h + 10, 0 < h < 6$.

3.1 $(N \circ T)(h) = N(T(h)) = N(4h+10)$

$$=(4h+10)^2 + 125(4h+10) + 100$$

$$=16h^2 + 580h + 1450.$$

3.2 $(N \circ T)(4) = 16\times16 + 580\times4 + 1450 = 4026$

4026 bactérias

3.3 $(N \circ T)(h) = 5000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16h^2 + 580h + 1450 = 5000$

$\Leftrightarrow 16h^2 + 580h - 3550 = 0$

$\Rightarrow h \approx 5{,}3554$

$0{,}3554 \times 60 \approx 21$.

Terão de decorrer 5 h 21 min.

Pág. 86

1.1 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27} \Leftrightarrow 3^{-x} = (3^3)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

1.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{-x+1} \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^{-x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x > -x+1 \Leftrightarrow 0x > 1$, impossível.

$S = \{\}$

Pág. 87

2.1 $2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$

$S = \{5\}$

2.2 $5^{-2x} = 25^{x+2} \Leftrightarrow 5^{+2x} = (5^2)^{x+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^{2x+4} \Leftrightarrow -2x = 2x+4 \Leftrightarrow$

$-4x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

3. $M = Ce^{rt}$

$t = 3$, $C = 1000$, $r = 0{,}05$

$M = 1000\times e^{0{,}05\times3} \Leftrightarrow M \approx 1161{,}83$ meticais.

Pág. 88

4. $M(3) = \dfrac{100}{1+39e^{-0{,}49\times3}} = 10{,}033$

Pág. 91

5.1 $\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_3 243 + \log_{216} 6$

Cálculos auxiliares:

$\log_3 243 = \log_3(3^5) = 5$

$\log_{216} 6 = x \Leftrightarrow 216^x = 6 \Leftrightarrow 6^{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_3 243 + \log_{216} 6 = -2 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

5.2 $\log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} + \log_4 \sqrt{2}$

Cálculos auxiliares:

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow x = -3$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$

$\log_4 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 4^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} + \log_4 \sqrt{2} = -3 + 2 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

Pág. 92

6.1 $\log_x 81 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x^4 = 3^4 \Leftrightarrow$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 3$$

$S = \{3\}$

6.2 $\log_x \frac{1}{3} = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$$

$S = \{\sqrt{3}\}$

Pág. 93

7.1 $2\ln(x+3)=\ln(1-3x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x+3)^2=\ln(1-3x)\wedge x+3>0\wedge 1-3x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2=1-3x\wedge x>-3\wedge x<\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+3x-1=0\wedge\ x\in\left]-3,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+9x+8=0\wedge\ x\in\left]-3,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-8\vee x=-1)\wedge\ x\in\left]-3,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1$, $S=\{-1\}$

7.2 $\ln\left(\frac{5-x}{e^x}\right)=-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(5-x)-\ln(e^x)=-x\wedge 5-x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(5-x)-x=-x\wedge x<5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(5-x)=0\wedge x<5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-x=e^0\wedge x<5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-x=1\wedge x<5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4\wedge x<5\Leftrightarrow x=4$, $S=\{4\}$

Pág. 94

8. $2\ln(x)-\ln(x+3)\le\ln(x+5)$

Domínio: $x>0\wedge x+3>0\wedge x+5>0\Leftrightarrow x>0$

$D=\mathbb{R}^+$

$2\ln(x)-\ln(x+3)\le\ln(x+5)\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x^2)-\ln(x+3)\le\ln(x+5)\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\le\ln(x+5)\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3}\le x+5\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3}-(x+5)\le 0\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-(x+5)(x+3)}{x+3}\le 0\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-x^2-8x-15}{x+3}\le 0\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8x+15}{x+3}\ge 0\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x<-3\vee x\ge-\frac{15}{8}\right)\wedge x>0\Leftrightarrow x>0$

Pág. 95

9. $M=-3{,}64+0{,}69\log_{10}E$

9.1 $E=3\times 10^{10}$

$M=-3{,}64+0{,}69\log_{10}(3\times 10^{10})$

$M=3{,}59$

9.2 $M=7$

$7=-3{,}64+0{,}69\log_{10}E$

$\frac{7+3{,}64}{0{,}69}\ \log_{10}E$

$\log_{10}E=15{,}42$

$E=10^{15{,}42}$

$E=2{,}6\times 10^{15}$

Pág. 99

10. $f(x)=-2+2\sin x$

10.1 $D_f=\mathbb{R}$

10.2 $-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\le 2\sin x\le 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\le -2+2\sin x\le 0$

$D'_f=[-4,0]$

10.3 $f(x+p)=f(x)\Leftrightarrow$

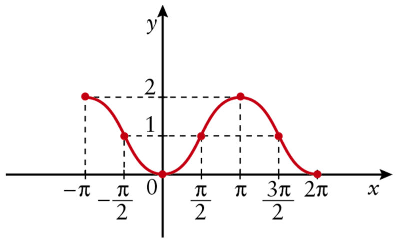
$\Leftrightarrow -2+2\sin(x+p)=-2+\sin x\Leftrightarrow$

Como a função seno é periódica de período 2π, temos $p=2\pi$.

Período: 2π

Pág.102

11. $f(x)=1-\cos x,\ x\in[-\pi,2\pi]$



11.1 $x\in[0,\pi]$

11.2 $f(x)=0\Leftrightarrow 1-\cos x=0\Leftrightarrow$

$\cos x=1\Leftrightarrow x=0+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$x\in[0,\pi]$: $k=0$, $x=0$

$k=1$, $x=2\pi$

Zeros: 0 e 2π.

11.3 $-1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow -1\le-\cos x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le 1-\cos x\le 2$

$D'_f=[0,2]$

$f(x)=2\Leftrightarrow 1-\cos x=2\Leftrightarrow$

$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$x\in[0,2\pi]$:

$k=-1$, $x=-\pi$

$k=0$, $x=\pi$

$-\pi$ e π.

12. $f(x) = 1 + \operatorname{tg} x, x \in [-\pi, 2\pi]$

12.1 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$

$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$x \in [-\pi, 2\pi]: k = 0, x = -\frac{\pi}{4}$

$k = 1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$k = 2, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

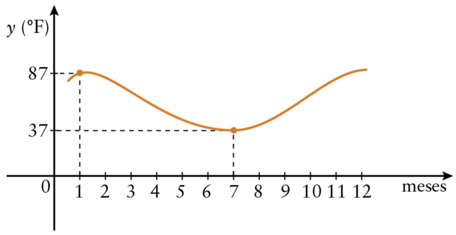
Zeros: $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Pág.105

12.2 Não tem máximo.

13. 37 °F em Julho e 87 °F em Janeiro.

13.1



13.2 $y = a\cos[b(x-c)] + d$

b: período $\frac{2\pi}{b} = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{12} = b \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$

Máximo: 87 $(\cos[b(x-c)] = 1) \rightarrow a + d = 87$

Mínimo: 37 $(\cos[b(x-c)] = -1) \rightarrow -a + d = 37$

$\begin{cases} a + d = 87 \\ -a + d = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 87 - d \\ 2d = 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 87 - d \\ d = 62 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 25 \\ d = 62 \end{cases}$

$y = 25\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-c)\right] + 62$

y é máximo quando $x = 1$ então:

$87 = 25\cos\left[\frac{\pi}{6}(1-c)\right] + 62 \Leftrightarrow$

$\cos\left[\frac{\pi}{6}(1-c)\right] = 1$, o menor valor que verifica esta condição é o então $\frac{\pi}{6}(1-c) = 0 \Leftrightarrow 1 - c = 0 \Leftrightarrow c = 1$

$y = 25\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-1)\right] + 62$

Pág.106

1. $P(t) = 10\,000e^{0,02t}$

1.1 $\frac{P(t+1)}{P(t)} =$

$= \frac{1000\,e^{0,02(t+1)}}{1000\,e^{0,02t}} =$

$= e^{0,02t+0,02-0,02t} =$

$= e^{0,02}$

1.1 $e^{0,02} \approx 1,02$

A população aumenta 2% ao ano.

2. $N(5) = 2\,000\,000e^{-0,558\times5} \approx 122\,842$

3. $f(t) = 50\,(1 - e^{-0,2t})$

$f(20) = 50\,(1 - e^{-0,2\times20}) = 49{,}08$ m/s

4. $n(t) = 1,36\left(\frac{e}{2,5}\right)^t$

$n(40) = 1,36\left(\frac{e}{2,5}\right)^{40} \approx 38,7 \approx 39$

5. x - ano

y - população (mil milhões)

x	y
1900	1,65
1925	3,30
1950	6,60
1975	13,20
2000	26,40

O valor da população em 2000 seria 26 milhares de milhões.

6.1 $a(0) = \frac{20}{1+4} = 4$; $b(0) = \frac{20}{1+9} = 3$

6.2 $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{20}{1+4e^{-0,07t}} = \frac{20}{1+4e^{-0,07(+\infty)t}} = \frac{20}{1+4e^{-\infty}}$

$= \frac{20}{1+4\times0} = \frac{20}{1} = 20$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{20}{1+9e^{-0,03t}} = \frac{30}{1+9\times0} = 30$

6.3 96 dias

Pág.107

7.1 $N(5) = \frac{200}{1+4e^{-0,12\times5}} = 63$

7.2 $100 = \frac{200}{1+4e^{-0,12t}} \Leftrightarrow 1+4e^{-0,13} = \frac{200}{100}$

$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-0,13t} = 0,25 \Leftrightarrow -0,12t = \ln 0,25$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,25}{-0,12} \Rightarrow t \approx 12$

7.3 Não, a população de veados, nunca pode ultrapassar os 200 indivíduos.

$\lim_{t\to+\infty} \frac{200}{9+4e^{-0,12t}} = 200$.

8.1 Sem produção não há lucro.

$0=\log_{10}(100)+k$

$\Leftrightarrow k=-log_{10}100$

$\Leftrightarrow k=-2$

8.2 $L(5000)=\log_{10}(100+5000)-2$

$L(5000)=\log_{10}(5100)-2$

$L(5000)=1{,}707$ dezenas de milhares de meticais

8.3 $1=\log_{10}(100+n)-2$

$3=\log_{10}(100+n)$

$10^3=100+n$

$1000=100+n$

$n=900$

9.1 $M=-3{,}64+0{,}69\log_{10}(5\times10^{12})$; $M\approx5{,}122$

9.2 $4=-3{,}64+0{,}69\log_{10}E$

$\log_{10}E=\frac{4+3{,}64}{0{,}69}\Leftrightarrow\log_{10}E=21{,}1$

$\Leftrightarrow E=10^{21{,}1}\approx1{,}259\times10^{21}$

10. $A=-0{,}52+0{,}55\ln p$

$A=-0{,}52+0{,}55\ln10$

$A\approx0{,}746$ m ≈ 75 cm