PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 2

Pág. 17

Actividades de investigação

Dadas duas pessoas, a probabilidade de terem aniversários com datas diferentes é: $1\times\left(1-\frac{1}{365}\right)$.

Se forem três pessoas, a probabilidade é: $1\times\left(1-\frac{1}{365}\right)\times\left(1-\frac{2}{365}\right)$.

No caso de termos 23 pessoas, a probabilidade será:

$$1\times\left(1-\frac{1}{365}\right)\times\left(1-\frac{2}{365}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{22}{365}\right)$$

Como este valor é menor do que $\frac{1}{2}$, então 23 é o menor de pessoas para o qual esta probabilidade é menor do que $\frac{1}{2}$.

O menor número de pessoas para o qual é mais provável encontrar coincidência de aniversário do que não encontrar é 23.

Pág. 20

1.1 $\frac{P_3+P_5}{3!}=\frac{3!+5!}{3!}=\frac{3!}{3!}+\frac{5!}{3!}=1+\frac{5\times4\times3!}{3!}=$

$= 1 + 5 \times 4 = 21$

1.2 abc, acb, bac, bca, cab, cba

1.3 Não há letras repetidas: $P_6 = 6! = 720$.

Pág. 21

2.1 a) $^6A_2 = 6 \times 5 = 30$

b) $^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

c) $^{10}A_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

2.2 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 e 43.

Pág. 22

3. $42\,{}^nA_3 = {}^nA_5$

$\Leftrightarrow 42\frac{n!}{(n-3)!}=\frac{n!}{(n-5)!}$

$\Leftrightarrow \frac{42}{(n-3)(n-4)(n-5)!}=\frac{1}{(n-5)!}$

$\Leftrightarrow 42=(n-3)(n-4)$

$\Leftrightarrow n^2-4n-3n+12-42=0$

$\Leftrightarrow n^2-7n-30=0$

$\Leftrightarrow n=-3\vee n=10$

Como $n\geq5$, temos $n=10$.

4. $^9A_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

Pág. 24

5.1 **a)** $\binom{6}{4}=\frac{^6A_4}{4!}=\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2}=15$

b) $^{30}C_0=\frac{30!}{0!30!}=1$

c) $^{100}C_{100}=\frac{100!}{100!0!}=1$

d) $\frac{^{33}C_{10}\times P_{23}}{^{34}A_8\times{}^{25}C_{10}\times P_{15}}$

$=\frac{\frac{33!}{23!10!}\times23!}{\frac{34!}{26!}\times\frac{25!}{15!10!}\times15!}=\frac{33!\times23!\times26!\times15!\times10!}{23!\times10!\times34!\times25!\times15!}=$

$=\frac{33!26\times25!}{34\times33!25!}=\frac{26}{34}=\frac{13}{17}$

5.2 **a)** $^nC_0=\frac{n!}{0!n!}=1$

b) $^{30}C_0=\frac{30!}{0!30!}=1$

c) $^nC_1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$

Pág. 25

6.1 $^{49}C_6=13\,983\,816$

6.2 $^{10}C_5=252$

7. $^nC_2=120\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{2}=120$

$\Leftrightarrow n^2-n-240=0$

$\Leftrightarrow n=-15\vee n=16$

Como $n\geq2$, temos $n=16$

Pág. 27

8.

8.1

			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

$2^7 = 128$

8.2 $^nC_0+{}^nC_1+\ldots+{}^nC_n=128\Leftrightarrow2^n=2^7\Leftrightarrow n=7$

Um conjunto com 128 subconjuntos tem 7 elementos.

Como $^7C_3={}^7C_4$, um conjunto com 7 elementos tem tantos subconjuntos de três elementos como subconjuntos de quatro elementos.

8.3

	1	a	b	22 100
1	$1+a$	$a+b$		Linha seguinte

$1+a+b+22\,100=23\,479$

$\Leftrightarrow a+b=23\,479-22\,100-1$

$\Leftrightarrow a+b=1378$

8.4. $2\,{}^nC_2=5\,{}^{n-2}C_2$

$\Leftrightarrow2\frac{^nA_2}{2!}=5\frac{^{n-2}A_2}{2!}\wedge n\geq2\wedge n-2\geq2$

$\Leftrightarrow 2n(n-1)=5(n-2)(n-3) \wedge n \geq 4$

$\Leftrightarrow 2n^2-2n=5n^2-15n-10n+30 \wedge n \geq 4$

$\Leftrightarrow 3n^2-23n+30=0 \wedge n \geq 4$

$\Leftrightarrow \left(n=6 \vee n=\dfrac{5}{3}\right) \wedge n \geq 4 \Leftrightarrow n=6$

Pág. 28

9.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & n=5
\end{array}$$

9.1 $(2a+b)^5=\sum_{p=0}^{5} {}^5C_p\,(2a)^{5-p}\,b^p=$

$= 1\,(2\,a)^5\,b^0 + 5\,(2\,a)^4\,b^1 + 10\,(2a)^3\,b^2 +$

$+ 10\,(2\,a)^2\,b^3 + 5\,(2\,a)\,b^4 + 1\,(2\,a)^0\,b^5 =$

$= 32\,a^5 + 80\,a^4\,b + 80\,a^3\,b^2 + 40\,a^2\,b^3 + 10\,a\,b^4 + b^5$

9.2 $\left(3+\dfrac{x}{3}\right)^5=\sum_{p=0}^{5} {}^5C_p\,3^{5-p}\left(\dfrac{x}{3}\right)^p=$

$=3^5+5\times 3^4\left(\dfrac{x}{3}\right)+10\times 3^3\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+10\times 3^2\times\left(\dfrac{x}{3}\right)^3+$

$+5\times 3\times\left(\dfrac{x}{3}\right)^4+\left(\dfrac{x}{3}\right)^5=$

$=243+135x+30x^2+\dfrac{10}{3}x^3+\dfrac{5}{27}x^4+\dfrac{1}{243}x^5$

9.3 $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4=\sum_{p=0}^{4} {}^4C_p\left(\sqrt{x}\right)^{4-p}\left(\sqrt{y}\right)^p=$

$=\left(\sqrt{x}\right)^4+4\left(\sqrt{x}\right)^3\sqrt{y}+6\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{y}\right)^2+$

$+4\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^4=$

$=x^2+4x\sqrt{x}\sqrt{y}+6xy+4\sqrt{x}y\sqrt{y}+y^2$

$(x \geq 0 \text{ e } y \geq 0)$

Pág. 29

10.1 22 termos.

10.2 $\left(\sqrt{3x}+1\right)^{13}$

$T_{p+1}={}^{13}C_p\left(\sqrt{3x}\right)^{13-p}1^p$

$T_8={}^{13}C_7\left(\sqrt{3x}\right)^6 1^7=1716(3x)^3=46\,332\,x^3$

10.3 $(3x+y)^6$; $T_{p+1}={}^6C_p\,(3x)^{6-p}\,y^p$

$p=\dfrac{6}{2}=3$

$T_4={}^6C_3\,(3x)^3\,y^3=20\times 27x^3y^3=540x^3y^3$

10.4 $(x+y)^n$

$T_{p+1}={}^nC_p x^{n-p}y^p$

Como $x^{n-p}y^p=x^{10}y^5$, temos:

$\begin{cases} n-p=10 \\ p=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ p=5 \end{cases} \Rightarrow n=15$

Pág. 30

1. ${}^9A_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

Resposta: (A).

2. $P_3 = 6$ (não há resultados repetidos)

Resposta: (D).

3.

1.º A	2.º A	3.º A	
7	7	2	Começados por 77
7	2	9	Começados por 78 ou 79
2	9	9	Começados por 8 ou 9

$2 + 2 \times 9 + 2 \times 9 \times 9 = 182$

Resposta: (D).

4. ANÁLISE

As 3 consoantes (NLS) podem trocar entre si de $P_3 = 6$ maneiras diferentes.

As vogais (AAIE) podem trocar entre si de $\dfrac{P_4}{P_2}=12$ maneiras diferentes.

O grupo das consoantes pode ocupar uma de 5 posições entre as vogais (.A.A.I.E.).

$6 \times 12 \times 5 = 360$

Resposta: (B).

5. Há 6 hipóteses para A

5 para B (diferente de A)

4 para C (diferente de A e B)

5 para D (diferente de C)

5 para E (diferente de D)

$6 \times 5 \times 4 \times 5 \times 5 = 3000$

Resposta: (C).

6. 8 2 2 2 2 5 5 9 9

$\dfrac{P_7}{P_3 \times P_2 \times P_2}=\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$

Resposta: (A).

7. ${}^7C_2=21$

Resposta: (D).

8. $P_2 \times 4 \times P_2 \times P_3 = 96$

Restantes 3 em 3 lugares

Hipóteses de ocupar os extremos

Hipóteses de colocar dois que ficam juntos

Os dois juntos podem trocar entre si

Resposta: (C).

9. Há 3 casos a considerar

$$\frac{P}{4}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{5}\ \frac{I}{5}$$

$$\frac{P}{4}\ \frac{I}{5}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{5}$$

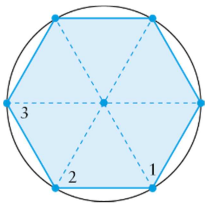
$$\frac{I}{5}\ \frac{P}{5}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{5}$$

$4 \times 5^3 + 4 \times 5^3 + 5^4 = 1625$

Resposta: (A).

Pág. 31

1.



$^7C_3 - 3 = 35 - 3 = 32$

Há 3 subconjuntos de 3 pontos colineares.

2. $\frac{1.^{\text{o}}\,B}{8}\quad \frac{2.^{\text{o}}\,B}{8}\quad \frac{3.^{\text{o}}\,B}{8}\quad \frac{4.^{\text{o}}\,B}{8}$

$8 \times 8 \times 8 \times 8$ ou $^8A'_4 = 8^4 = 4096$

3. $P_3 \times P_5 \times P_6 = 3! \times 5! \times 6! = 518\,400$

4. Há seis sabores diferentes.

4.1 **a)** A ordem da escolha não interessa.

$^6C_3 = 20$

b) $^6C_2 \times 2 + {}^6C_3 = 15 \times 2 + 20 = 50$

3 sabores diferentes

2 sabores A e B (A + 2 B ou 2 A + B)

4.2 Agora interessa a ordem:

$^6A_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

Pelo menos um sabor diferente dos outros

$^6C_2 \times 2 \times 3 + {}^6A_3 = 90 + 120 = 210$

3 sabores diferentes

Posição da bola diferente

2 A e B ou A e 2 B

Escolha de dois sabores A e B

5. AMORES

S A M O R E $\quad P_5 = 120$

Há 3 vogais: $3 \times P_5 = 360$

120 ; 360.

6. Rapazes Meninas

10 7

6.1 $^{10}C_3 = 252$

6.2 $^7C_5 = 21$

6.3 $^{10}C_2 \times {}^7C_3 + {}^{10}C_3 \times {}^7C_2 = 1575 + 2520 = 4095$

3 rapazes + 2 meninas

2 rapazes + 3 meninas

6.4 $^{17}C_5 - \left({}^{10}C_5 \times {}^7C_0 + {}^{10}C_4 \times {}^7C_1\right)$

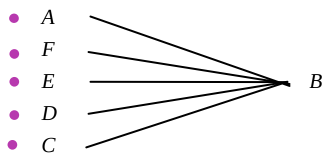
Comissões com uma menina

Comissões só com rapazes

Todas as comissões

$= 6188 - (252 + 1470) = 4466$

7.



ABD, ABE,…

B é fixo.

Há que escolher mais dois pontos em $\{A, D, E, F, C\}$

$^5C_2 = 10$

8. $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^{14}$

$$T_{p+1} = {}^{14}C_p \left(\frac{x}{2}\right)^{14-p} \left(-\frac{2}{x}\right)^p$$

$$T_7 = {}^{14}C_6 \left(\frac{x}{2}\right)^8 \left(-\frac{2}{x}\right)^6 = 3003 \frac{x^8}{2^8}\frac{2^6}{x^6} = 3003 \frac{x^2}{2^2} = \frac{3003}{4}x^2$$

9. A soma dos três últimos elementos é igual à soma dos três primeiros.

$^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 = 106$

$1 + {}^{n+1}C_2 = 106$

$\frac{(n+1) \times n}{2} = 105$

$n^2 + n - 210 = 0$

$n = 14$

$1 + {}^nC_1 = 1 + 14 = 15$

Pág. 39

1.1 Blusas Saias Casacos

3 2 2

$3 \times 2 \times 2 = 12$

Pode fazer 12 *toilettes* diferentes

1.2 Número de casos possíveis: 12

Número de casos favoráveis

Apenas o azul e verde são cores comuns às três peças de roupa e só existe uma peça de cada cor. Logo, há 2 casos possíveis (verde ou azul).

$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

2. Trata-se de calcular a probabilidade de a soma dos números saídos nos dois últimos lançamentos ser 8.
(5 + 3 + 8 = 16).

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P = \frac{5}{36}$

Pág. 40

1. Casos possíveis: ${}^8C_3 = 56$
Casos favoráveis: ${}^6C_1 = 6$ (Nos restantes seis é escolhido um)

$P = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

Resposta: (D).

2. Casos possíveis: ${}^9C_5 = 126$
Casos favoráveis

Pirâmide **Outros**

$$\begin{matrix} 5 & & 4 \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 4 \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Possibilidades}$$

${}^5C_2\ {}^4C_3 + {}^5C_1\ {}^4C_4 = 10 \times 4 + 5 = 45$

$P = \frac{45}{126} = \frac{5}{14}$

Resposta: (A).

3. Número de casos possíveis: ${}^6A'_3 = 6^3 = 216$
Número de casos favoráveis
a A : ${}^5A'_3 = 5^3 = 125$
a B : ${}^6A_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$
a C : ${}^3A'_3 = 3^3 = 27$

$P(A) = \frac{125}{216}$; $P(B) = \frac{120}{216}$; $P(C) = \frac{27}{216}$;

$P(A) > 4\,P(C)$

Resposta: (D).

4. 8 4 _ _ _ _ _ _ 7 7
3 8 8 _ _

$5 \times {}^4C_2 \times 7^2$

7^2 → Dois algarismos escolhidos ordenadamente entre 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9.
${}^4C_2$ → Possibilidades de escolha da posição dos algarismos 8
5 → Possibilidades de escolha da posição dos algarismos 3.

$P = \frac{1}{5 \times {}^4C_2 \times 7^2}$

Resposta: (B).

5. Número de casos favoráveis: ${}^{14}C_4$
Número de casos possíveis: ${}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5C_1$

$$\frac{{}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5C_1}{{}^{14}C_4}$$

Resposta: (A).

Pág. 41

1. Número de casos favoráveis: ${}^{31}C_4 = 31\,465$
Número de casos possíveis
Para além do Ramos, a comissão terá de ser formada por mais três alunos, escolhidos em 30, sendo pelo menos uma rapariga:
${}^{18}C_3 + {}^{18}C_2\,{}^{12}C_1 + {}^{18}C_1\,{}^{12}C_2 = 3840$

$P = \frac{3840}{31465} \approx 0{,}122$

2.1 $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$P(A) = \frac{4}{9}$

2.2 $B = \{2, 3, 5, 7\}$

$P(B) = \frac{4}{9}$

2.3 $C = S$; $P(C) = 1$.

2.4 $A \cap B = \{2\}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{9}$

2.5 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$P(A \cup B) = \frac{7}{9}$

3.1 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3.2 $P = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$

3.3 $P = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$

3.4 $P = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$

4. Número de casos possíveis: $P_8 = 8!$
Número de casos favoráveis: $P_3 \times P_5 \times 2 = 3! \times 5! \times 2$

$P = \frac{3! \times 5! \times 2}{8!} = \frac{1}{28}$

5. Número de casos possíveis: $P_8 = 8!$
Número de casos favoráveis: $P_4 \times P_4 \times 2 = 4! \times 4! \times 2$

$P = \frac{4! \times 4! \times 2}{8!} = \frac{1}{35}$

6.1 Com dois algarismos 9:

$^{4}C_{2} \times {}^{9}A'_{2} = 486$

Outros 2 algarismos

Número de possíveis posições dos algarismos 9.

Com três algarismos 9: $^{4}C_{3} \times 9 = 36$

Com quatro algarismos 9: 1

486 + 36 + 1 = 523

6.2 $\overline{2}\ \ \overline{10}\ \ \overline{10}\ \ \overline{10}$

O 1.º algarismo pode ser 3 ou 4.

$2 \times 10^{3} - 1 = 1999$

O código 3000

6.3 $P = \dfrac{^{10}A_{4}}{^{10}A'_{4}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^{4}} = \dfrac{63}{125} = 0,504$