Capítulo 4

1. Equações e inequações logarítmicas

Pág. 101

1.1 $\log_2(64) = \log_2(2^6)$,

donde $\log_2(2^6) = y \Leftrightarrow 2^y = 2^6 \Leftrightarrow y = 6$;

1.2 $\log_{16}(16) = y \Leftrightarrow 16^y = 16 \Leftrightarrow y = 1$;

1.3 $\log_5(5) = y \Leftrightarrow 5^y = 5 \Leftrightarrow y = 1$;

1.4 $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = y \Leftrightarrow 3^y = \frac{1}{81}$

$\Leftrightarrow 3^y = 3^{-4} \Leftrightarrow y = -4$;

1.5 $\log_2\left(\frac{1}{64}\right) = y \Leftrightarrow 2^y = \frac{1}{64}$

$\Leftrightarrow 2^y = 2^{-6} \Leftrightarrow y = -6$;

1.6 $\log_4(1) = y \Leftrightarrow 4^y = 1 \Leftrightarrow 4^y = 4^0 \Leftrightarrow y = 0$;

1.7 $\log_{\frac{1}{4}}(2) = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y = 2 \Leftrightarrow 2^{-2y} = 2$

$\Leftrightarrow -2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$;

1.8 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{125}\right) = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^y = \frac{1}{125}$

$\Leftrightarrow 5^{-y} = 5^{-3} \Leftrightarrow y = 3$;

1.9 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow 2^{-y} = 2^{-4} \Leftrightarrow y = 4$;

1.10 $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \log_{\frac{1}{32}}(2) = -5 - \frac{1}{5} = -\frac{26}{5}$.

Cálculo auxiliar

Seja $a = \log_2\left(\frac{1}{32}\right) \Leftrightarrow 2^a = \frac{1}{32}$

$\Leftrightarrow 2^a = 2^{-5} \Leftrightarrow a = -5$

e

$b = \log_{\frac{1}{32}}(2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^b = 2$

$\Leftrightarrow 2^{-5b} = 2 \Leftrightarrow -5b = 1$

$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{5}$

Pág. 102

2.1 $\log 1000 = \log 10^3 = 3$;

2.2 $\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$;

2.3 $\ln e^3 = 3$;

2.4 $\ln e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$;

2.5 $\ln \sqrt[5]{e} = \ln e^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$;

2.6 $\log(0{,}1) = \log 10^{-1} = -1$;

2.7 $\ln(e) = 1$;

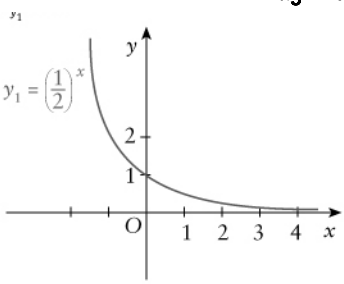
2.8 $\log 10 = 1$;

2.9 $\ln e^2 + \ln e^{-10} + \log 1 = 2 - 10 + 0 = -8$.

Pág. 103

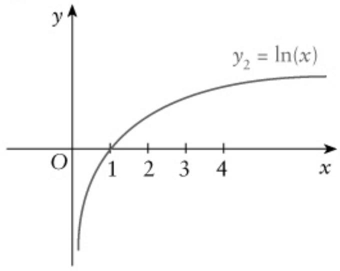
3.1 $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$D_{y_1} = \mathbb{R}$



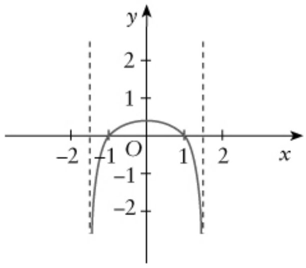
3.2 $y_2 = \ln(x)$

$D_{y_2} = \mathbb{R}^+$



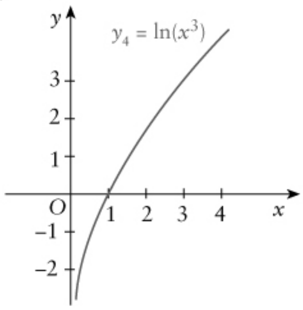
3.3 $y_3 = \log(2 - x^2)$

$D_{y_3} =]-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}[$



3.4 $y_4 = \ln(x^3)$

$D_{y_4} = \mathbb{R}^+$



Pág. 106

4.1 a) $\log_2(64 \times 16)$

$= \log_2(64) + \log_2(16)$

$= \log_2(2^6) + \log_2(2^4)$

$= 6 + 4$

$= 10$;

b) $\log_3(81 \times 27) = \log_3(81) + \log_3(27)$

$= \log_3(3^4) + \log_3(3^3)$

$= 4 + 3$

$= 7$;

c) $\log_2(64 : 16) = \log_2(64) - \log_2(16)$

$= \log_2(2^6) + \log_2(2^4)$

$= 6 - 4$

$= 2$;

d) $\log_3(81 : 27) = \log_3(81) - \log_3(27)$

$= \log_3(3^4) + \log_3(3^3)$

$= 4 - 3$

$= 1$;

e) $\log_2(32)^8 = 8 \times \log_2(32)$

$= 8 \times \log_2(2^5)$

$= 8 \times 5$

$= 40$;

f) $\log_3\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{81^8}\right) = \log_3(\sqrt[4]{27}) - \log_3(81)^8$

$= \log_3(\sqrt[4]{3^3}) - 8 \times \log_3(3^4)$

$= \log_3\left(3^{\frac{3}{4}}\right) - 8 \times \log_3 3^4$

$= \frac{3}{4} - 8 \times 4$

$= \frac{3}{4} - 32$

$= -\frac{125}{4}$.

4.2 a) Queremos mostrar que: $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

Seja $\log_a(b) = x$ e $\log_b(a) = y$.

Logo, $a^x = b$ e $b^y = a$, substituindo b , na segunda igualdade, vem $(a^x)^y = a$, logo, $a^{xy} = a$, daí que $xy = 1$, donde $x = \frac{1}{y}$, isto é, $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

c. q. m.

b) Queremos mostrar que:

$\log\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right) = \frac{1}{2}\log_{(a)} - \frac{3}{10}\log(b)$

1.° membro $= \log\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{a}{b^{\frac{3}{5}}}}\right)$

$= \log\left(\frac{a}{b^{\frac{3}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \log\left(\frac{a}{b^{\frac{3}{5}}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\log(a) - \log\left(b^{\frac{3}{5}}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\log(a) - \frac{1}{2}\log b^{\frac{3}{5}}$

$= \frac{1}{2}\log(a) - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \log(b)$

$= \frac{1}{2}\log(a) - \frac{3}{10}\log(b) = 2.°$ membro

c.q.m.

4.3 a) $\ln(x^2) + \ln(x) - \ln(\sqrt{x})$

$= \ln(x^3) - \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \ln\left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$

$= \ln\left(x^{\frac{5}{2}}\right)$

$= \frac{5}{2}\ln(x)$;

b) $2\ln(a^2) - 3\ln(b)$

$= \ln(a^4) - \ln(b^3)$

$= \ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$.

Pág. 107

5.1 $\log_3(x) = 5$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log_3(x) = 5 \iff \log_3(x) = \log_3(3^5)$

$\iff x = 3^5 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\iff x = 243 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \iff x = 243$

$S = \{243\}$;

5.2 $\log_x(3) = 2$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}^+ : x \neq 1\} = \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

$\log_x(3) = 2 \iff \log_x(3) = \log_x(x^2)$

$\iff 3 = x^2 \wedge x \in D$

$\iff (x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}) \wedge x \in D$

$\iff x = \sqrt{3}$

$S = \{\sqrt{3}\}$;

5.3 $2^x = 80 \iff x = \log_2(80)$

$S = \{\log_2 80\}$;

5.4 $\log(3x^2) = \log(x^3)$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 > 0 \wedge x^3 > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log(3x^2) = \log(x^3) \iff 3x^2 = x^3 \wedge x \in D$

$\iff 3x^2 - x^3 = 0 \wedge x \in D$

$\iff x^2\,(3 - x) = 0 \wedge x \in D$

$\iff (x^2 = 0 \vee 3 - x = 0) \wedge x \in D$

$\iff (x = 0 \vee x = 3) \wedge x \in D$

$\iff x = 3$

$S = \{3\}$;

5.5 $3^{2x-1} = \sqrt{3} \iff 3^{2x-1} = 3^{\frac{1}{2}}$

$\iff 2x - 1 = \frac{1}{2}$

$\iff 2x = \frac{3}{2}$

$\iff x = \frac{3}{4}$

$S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$;

5.6 $x = \log_{36}6 \iff x = \log_{36}\sqrt{36}$

$\iff x = \log_{36} 36^{\frac{1}{2}}$

$\iff x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

5.7 $\log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 8$

O domínio é

$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[$

$\log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 8 \iff x + 1 = (\sqrt{2})^8 \wedge x \in D$

$\iff x + 1 = 2^4 \wedge x \in D$

$\iff x = 15 \wedge x \in D$

$\iff x = 15$

$S = \{15\}$;

5.8 $\log_x(\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}^+ : x \neq 1\} = \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

$\log_x(\sqrt{5}) = -\frac{1}{2} \iff$

$\iff \sqrt{5} = x^{-\frac{1}{2}} \wedge x \in D$

$\iff 5^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \wedge x \in D$

$\iff x = \frac{1}{5} \wedge x \in D$

$\iff x = \frac{1}{5}$

$S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$;

5.9 $x\log(1{,}25) + 3x\log(20) = 1$

$\iff x\,(\log(1{,}25) + 3\log(20)) = 1$

$\iff x\,(\log(1{,}25) + \log(20)^3) = 1$

$\iff x\,(\log(1{,}25) + \log(8000)) = 1$

$\iff x\log(1{,}25 \times 8000) = 1$

$\iff x\log(10\,000) = 1$

$\iff x\log 10^4 = 1$

$\iff x \times 4 = 1$

$\iff x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

6.1 a) $3 - \ln e^{3x} = 0$ **Pág. 108**

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} : e^{3x} > 0\} = \mathbb{R}$

$3 - \ln e^{3x} = 0 \Leftrightarrow 3 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 3$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$;

b) $\frac{1}{e^x} - 3e^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3e^x \times e^x + 2e^x = 0 \ \wedge \ e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow -3\,(e^x)^2 + 2e^x + 1 = 0$

Seja $e^x = t$

$\Leftrightarrow -3t^2 + 2t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-6}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm 4}{-6}$

$\Leftrightarrow t = 1 \ \vee \ t = -\frac{1}{3}$

Substituindo de novo a variável, vem:

$e^x = 1 \ \vee \ e^x = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow e^x = e^0 \ \vee$ equação impossível, uma vez que $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$;

c) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = 2 \ \vee \ e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 \ \vee \ x = 0$

$S = \{0,\ \ln 2\}$.

6.2 a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$;

b) $e^{3+2\ln x} - (x-3)\,e^3 = 0$

$\Leftrightarrow e^3 \times e^{2\ln x} - (x-3)\,e^3 = 0$

$\Leftrightarrow e^3 \times [e^{\ln x^2} - (x-3)] = 0$

$\Leftrightarrow e^3 \times [x^2 - x + 3] = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$, impossível em $\mathbb{R}$.

$S = \varnothing$.

7.1 $\ln(x-2) + \ln(x+1) \geq \ln(x+2) - \ln 3$ **Pág. 110**

Determinação do domínio:

$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0 \wedge x + 1 > 0 \wedge x + 2 > 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x > -1 \wedge x > -2\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\ln(x-2) + \ln(x+1) \geq \ln(x+2) - \ln 3$

$\Leftrightarrow \ln[(x-2)(x+1)] \geq \ln\left(\frac{x+2}{3}\right)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq \frac{x+2}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq \frac{x+2}{3}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 \geq x + 2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 8 \geq 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, vem:

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+96}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{112}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 4\sqrt{7}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{2-2\sqrt{7}}{3}$

Como $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ **, então**

$S = \left[\frac{2+2\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$

7.2 $\log\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right) < 0\right]$

Determinação do domínio:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 > 0 \wedge \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right) > 0\right\}$

$x^2 + 2x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right) > 0$

$\Leftrightarrow 0 < x^2 + 2x + 1 < 1$

$\Leftrightarrow 0 < (x+1)^2 < 1$

$D = \left]-1, 0\right[$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\log\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right)\right] < 0$

$\log\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right)\right] < \log(1)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right) < 1$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 1\right) < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 > 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2 > 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, vem:

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6+2\sqrt{3}}{6} \vee x = \frac{-6-2\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{-3-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

Como $D = \left]-1, 0\right[$ **, então**

$S = \left]\frac{-3+\sqrt{3}}{3}, 0\right[$

Nota **: Por lapso, a solução que consta do manual não está correcta.**

8.1 a) **Se** $M = 3$**, então** $\log_{10} A = 0 \Leftrightarrow A = 10^0 \Leftrightarrow$ **Pág. 111**

$\Leftrightarrow A = 1$

É a magnitude de um tremor de terra com uma amplitude igual a 1.

b) $M_1 = \log_{10}(A_1) + 3 \Leftrightarrow M_1 - 3 = \log_{10}(A_1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A_1 = 10^{M_1 - 3}$

$M = \log_{10}(100\, A_1) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(100 \times 10^{M_1 - 3}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(10^2 \times 10^{M_1 - 3}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(10^{2 + M_1 - 3}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(10^{M_1 - 1}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = (M_1 - 1) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = M_1 + 2$

Nota **: Por lapso, a solução que consta do manual não está correcta.**

8.2 a) $pH = -\log\left(1{,}00 \times 10^{-7}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pH = -\left[\log(1{,}00) + \log\left(10^{-7}\right)\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pH = -\left[0 - 7\log(10)\right] \Leftrightarrow pH = -[-7 \times 1] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pH = 7$

b) **As soluções ácidas têm pH menor que 7 e as soluções alcalinas têm pH maior que 7.**

9.1 **Pág. 112**

$A(0) = 10\, e^{0,2 \times 0} = 10$

$\pi R^2 = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \Leftrightarrow R \approx 1{,}78$

Quando se iniciou a observação o raio da mancha era de $1{,}78$ km (2 c. d.) .

9.2 $\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{10\, e^{0,2\,(t+1)}}{10\, e^{0,2t}}$

$= \frac{e^{0,2t + 0,2}}{e^{0,2t}} = e^{0,2t + 0,2 - 0,2t} = e^{0,2} \approx 1{,}22$

Este resultado permite concluir que em cada hora que passa a área do crude espalhado sobre o mar é multiplicada por $e^{0,2} \approx 1{,}22$, ou seja, a área do crude aumenta 22% por hora.

9.3 $A = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$

$10e^{0,2t} = 4\pi$

$\Leftrightarrow e^{0,2t} = \frac{4\pi}{10}$

$\Leftrightarrow 0{,}2t = \ln\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{0{,}2}$

$\Leftrightarrow t = 1{,}14$ (2 c. d.)

O barco ficou ancorado até que, 10 horas depois da avaria, foi reparado. Assim, o crude chegou à praia 1,14 horas após a avaria, ou seja, antes deste ser reparado.

10.1 **Pág. 113**

$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-0,5t}$

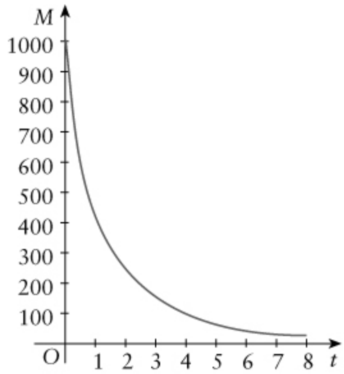
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,5t}$

$\Leftrightarrow -0{,}5t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}5} \Leftrightarrow t = 1{,}39$ (2 c. d.)

10.2 $M = 1000\, e^{-0,5t}$

$t = 0 \implies M = 1000$
$t = 1 \implies M = 606{,}5$ (1 c. d.)
$t = 2 \implies M = 367{,}9$
$t = 3 \implies M = 223{,}1$
$t = 4 \implies M = 135{,}3$
$t = 5 \implies M = 82{,}1$
$t = 6 \implies M = 49{,}8$
$t = 7 \implies M = 30{,}2$
$t = 8 \implies M = 18{,}3$



11.1 **Pág. 114**

O número de pessoas que observaram o fenómeno é igual a $P(0)$.

Assim:

$P(0) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,2 \times 0}} = 10$.

Logo, o fenómeno foi observado por 10 pessoas.

11.2 $P(10) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,2 \times 10}}$

$\Leftrightarrow P(10) = 45$ (às unidades)

Interpretação: Passadas 10 horas da observação do fenómeno, o número de pessoas que tinham conhecimento do boato era, aproximadamente, igual a 45 .

11.3 $P(t) = 60$

$\Leftrightarrow \frac{100}{1 + 9e^{-0,2t}} = 60$

$\Leftrightarrow 100 = 60 + 540e^{-0,2t}$

$\Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{2}{27}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{27}\right)}{-0{,}2}$

$\Leftrightarrow t = 13$ (às unidades)

Interpretação: Passadas 13 horas da observação do fenómeno, cerca de 60 pessoas sabiam do boato.

12.1 **Pág. 115**

$Q(0) = 10\log\left(\frac{10}{0 + 1}\right)$
$= 10\log(10) = 10 \times 1$
$= 10$

A quantidade de água utilizada na experiência foi 10 litros.

12.2 $Q(4) = 10\log\left(\frac{10}{4 + 1}\right)$
$= 10\log(2) \approx 3$

Aproximadamente 3 litros.

12.3 $G(t) = 10 - Q(t)10\log\left(\frac{10}{4+1}\right)$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10\log\left(\frac{10}{t+1}\right)$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10\left[\log(10) - \log(t+1)\right]$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10\left[1 - \log(t+1)\right]$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10 + 10\log(t+1)$

$\Leftrightarrow G(t) = 10\log(t+1)$ (c.q.d.)

12.4 $Q(t) = 0$

$\Leftrightarrow 10\log\left(\frac{10}{t+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log(10) - \log(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow \log(t+1) = \log(10)$

$\Leftrightarrow t + 1 = 10 \Leftrightarrow t = 9$

Para obtermos o sal de cozinha têm de decorrer 9 horas.

Pág. 116

1. $f(x) - g(x) > 0$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} - 2^{-x+1} > 0$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} > 2^{-x+1}$

$\Leftrightarrow x + 1 > -x + 1$

$\Leftrightarrow 2x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

(B) $\mathbb{R}^+$;

2. $Q(0) = 500^{1 - 0{,}2 \times 0}$

$= 500$

(D) 500 mg ;

3. $\log_a(ax^2) - \log_a(x)$

$= \log_a\left(\frac{ax^2}{x}\right)$

$= \log_a(ax)$

$= \log_a(a) + \log_a(x)$

$= 1 + \log_a(x)$

(B) $1 + \log_a(x)$;

4. $\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-0{,}5\,t}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0{,}5\,t}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}5}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(0{,}5)}{0{,}5}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{0{,}5}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0{,}5}$

(A) $t = \frac{\ln(2)}{0{,}5}$;

5. $f(x) = b^5 + \log_b 2\,,\ b > 1$

$\Leftrightarrow f(x) = b^5 \times b^{\log_b 2}$

$\Leftrightarrow f(x) = b^5 \times 2$

$\Leftrightarrow f(x) = 2b^5$

(A) $f(x) = 2b^5$;

6. $\log_2(x) = -5 + \log_2(x^2)$

$\Leftrightarrow \log_2(x) = -5 + 2\log_2(x)$

$\Leftrightarrow -\log_2(x) = -5$

$\Leftrightarrow x = 2^5$

$\Leftrightarrow x = 32$

7. Se $x = 32$ então $y = \log_2(32) = \log_2 2^5 = 5$

(B) $(32{,}5)$;

$(0\,,\ c) : c = e^{0 + 2b}$

$\Leftrightarrow c = e^0 \times e^{2b}$

$\Leftrightarrow c = e^{2b}$

$\Leftrightarrow 2b = \ln(c)$

$\Leftrightarrow b = \frac{\ln(c)}{2}$

(B) $\frac{\ln(c)}{2}$;

8. **Por exclusão:**

(A) $g(2) = e^{2-3} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0{,}3$ ——— exclui (A)

(B) $g(5) = e^{5-3} = e^2 \neq 7{,}4$ ——— exclui (B)

(C) $g(\ln 2) = e^{\ln(2) - 3} = \frac{e^{\ln(2)}}{e^3} = \frac{2}{e^3} \neq 1$ – exclui (C)

(D) $g(\ln 3) = e^{\ln(3) - 3} = \frac{e^{\ln(3)}}{e^3} = \frac{3}{e^3}$

(D) $\left(\ln 3\,,\ \frac{3}{e^3}\right)$;

9. $\ln(5e) + \ln(e^3)$

$= \ln(5) + \ln(e) + 3\ln(e)$

$= \ln(5) + 4\ln(e)$

$= \ln(5) + 4 \times 1$

$= 4 + \ln(5)$

(D) $4 + \ln(5)$.

Pág. 117

10.1 $3000 = N_0 \times e^{0{,}02 \times 20}$

$\Leftrightarrow 3000 = N_0 \times e^{0{,}4}$

$\Leftrightarrow N_0 = \frac{3000}{e^{0{,}4}}$

$\Leftrightarrow N_0 \approx 2011$ (às unidades)

No início havia cerca de 2011 plantas.

10.2 $2011 \times e^{0{,}02\,(t + x)} = 2 \times 2011 \times e^{0{,}02t}$

$\Leftrightarrow e^{0{,}02\,t + 0{,}02\,x} = 2\, e^{0{,}02\,t}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{0{,}02\,t + 0{,}02\,x}}{e^{0{,}02\,t}} = 2$

$\Leftrightarrow e^{0{,}02\,x} = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{0.02}$

$\Leftrightarrow x = 34{,}7$ (1 c. d.)

Interpretação: Passados 34,7 dias de um determinado dia t, tem-se o dobro das plantas.

11.1 $N(5) = \frac{200}{1 + 4e^{-0{,}12 \times 5}} = 62{,}59$ (2 c. d.)

Passados cinco anos da chegada dos veados à ilha, haverá, aproximadamente, 62 veados.

11.2 $100 = \frac{200}{1 + 4e^{-0{,}12\,t}}$

$\Leftrightarrow 1 + 4e^{-0{,}12\,t} = 2$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}12\,t} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-0{,}12}$

$\Leftrightarrow t = 11{,}55$ (2 c. d.)

Deverão decorrer cerca de 11,55 anos.

11.3 A condição que traduz o problema é:

$$\frac{200}{1+4e^{-0{,}12\,t}} > 200$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4e^{-0{,}12\,t} < 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}12\,t} < 0}$$

Condição impossível em $\mathbb{R}$.

Conclui-se, assim, que na ilha o número de veados nunca atingirá os 200.

12.1 $h(t) = 0{,}5$

$$\Leftrightarrow 0{,}32 + 0{,}89 \ln(t) = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}89 \ln(t) = 0{,}18$$

$$\Leftrightarrow \ln(t) = \frac{0{,}18}{0{,}89}$$

$$\Leftrightarrow t = e^{\frac{0{,}18}{0{,}89}}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 1{,}2$$

A planta tem aproximadamente 1,2 meses.

12.2 $h(3t) - h(t) =$

$$= 0{,}32 + 0{,}89 \ln(3t) - (0{,}32 + 0{,}89 \ln(t))$$

$$= \cancel{0{,}32} + 0{,}89 \ln(3t) - \cancel{0{,}32} - 0{,}89 \ln(t)$$

$$= 0{,}89 \ln(3t) - 0{,}89 \ln(t)$$

$$= 0{,}89 [\ln(3t) - \ln(t)]$$

$$= 0{,}89 \ln\left(\frac{3t}{t}\right)$$

$$= 0{,}89 \ln(3) \approx 0{,}98 \text{ (2 c. d.)}$$

Podemos assim concluir que $h(3t) - h(t)$ é constante, sendo aproximadamente igual a 0,98.

Este resultado permite concluir que se o tempo que decorre do crescimento de uma planta aumenta para o triplo em relação a outra, a diferença entre as suas alturas é, aproximadamente, 98 cm.

13.1 $62 = 37 + (70 - 37)\,e^{-k}$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{33} = e^{-k}$$

$$\Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{25}{33}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = 0{,}28 \text{ (2 c. d.)}$$

13.2 $40 = 37 + (70 - 37)\,e^{-0{,}28\,k}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{33} = e^{-0{,}28\,k}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{3}{33}\right)}{-0{,}28}$$

$$\Leftrightarrow k = 8{,}56 \text{ (2 c. d.)}$$

Será necessário esperar 8,56 h para que o vinho atinja uma temperatura de 40 °F.