

Pág. 85

1.2 A população mundial pode ser encontrada pela função:

$P(t) = 6(1 + 0,02)^t$, com t em anos após 1992.
Assim, no ano 2200 ($2200 - 1992 = 208$) a população mundial prevista será $6 \times (1,02)^{208} \approx 369$ milhares de milhão.

Comentário: A população mundial prevista para 2200 é de 369 milhares de milhão, daí poder afirmar-se que a mesma crescerá muito rapidamente.

1.3 2134 ;

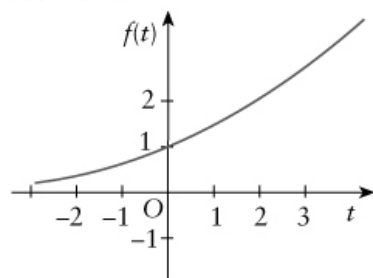
1.4 $P(t) = 6 \times (1,03)^t$, com t em anos após 1992 .

2.1 Pág. 87

t (dias)	P (milhões)
0	1
1	1,5
2	2,25
...	...
t	$1,5^t$

Ao fim de t dias haverá $1,5^t$ milhões de bactérias.

2.2 $f(t) = (1,5)^t$



3.1 $4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-2}$ Pág. 88
 $\Leftrightarrow x = -2$
c. s. = $\{-2\}$

3.2 $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 1000 \Leftrightarrow 10^{-x} = 10^3$
 $\Leftrightarrow -x = 3$
 $\Leftrightarrow x = -3$
c. s. = $\{-3\}$

3.3 $125 = 5^{2-x} \Leftrightarrow 5^3 = 5^{2-x}$
 $\Leftrightarrow 3 = 2 - x$
 $\Leftrightarrow x = -1$
c. s. = $\{-1\}$.

4.1 $3^x > \frac{1}{81} \cup 3^x > 3^4 \cup x > -4$ Pág. 89
 $S =]-4, +\infty[$

4.2 $\frac{1}{3} < 27 \cup 3^x < 3^3 \cup -x < -3 \cup x > 3$
 $S =]3, +\infty[$

4.3 $\frac{7}{2} \leq 1 \cup \frac{7}{2} \leq \frac{7}{2} \cup x \leq 0$
 $S =]-\infty, 0]$

4.4 $\frac{1}{2} < 2^{x-3} \cup 2^x < 2^{x-3} \cup -x < x - 3 \cup$
 $\cup -2x < -3 \cup 2x > 3 \cup x > \frac{3}{2}$
 $S = \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$

5.1 . O gráfico de $y_1 = 3^{x-2}$ obtém-se Pág. 90

deslocando duas unidades o gráfico de $y = 3^x$ na direcção do eixo Ox (sentido positivo).

5.2 . O gráfico de $y_2 = -3^{x-2}$ obtém-se do gráfico de $y_1 = 3^{x-2}$ por simetria relativamente ao eixo Ox .

5.3 . O gráfico de $y_3 = 4 - 3^{x-2}$ obtém-se deslocando-se o gráfico de $y_2 = -3^{x-2}$ quatro unidades na direcção do eixo Oy (sentido positivo).

5.4 . O gráfico de $y_4 = 3^{|x|}$ é simétrico relativamente ao eixo Oy e resulta do gráfico de $y = 3^x$ mantendo os pontos de abscissa não negativa.

5.5 . Sabe-se que $3^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo o gráfico de $y = 3^x$ é igual ao gráfico de $y = |3^x|$. Daí que o gráfico de $y_5 = -|3^x|$ seja simétrico do gráfico de $y = 3^x$ relativamente ao eixo Ox .

6.1 . $f(x) = 3^x$; Pág. 91

6.2 . $f(x) = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $f(x) = 2^{6-x}$.

7. Recolha de dados: Pág. 92

4 anos e 3 meses correspondem a 4,25 anos;

Taxa anual nominal de 3% = 0,03.

Então, o capital acumulado será

$20000 e^{0,03 \cdot 4,25} = 22720$ meticais

8. Pretende-se determinar $A(12) = 10 e^{-0,3 \times 12} = 0,273$ g **Pág. 93**
(3 c. d.)

9.1 Sabemos que $P(t) = 510 (1,8)^t$, daí que:

$$\begin{aligned} P(t) &= 510 (1,8)^t = \\ &= 510 (e^{\ln 1,8})^t \\ &= 510 e^{(\ln 1,8)t} \\ &= 510 e^{0,588t} \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever: $P(t) = 510 e^{\ln(1,8)t}$,
ou seja, $P(t) = 510 e^{0,588t}$.

9.2 $P(0) = 1113$, então $k = 1113$

$$\begin{aligned} \text{e } P(1) &= 1113 \times e^b \\ \Leftrightarrow 2153 &= 1113 \times e^b \\ \Leftrightarrow b &= \ln\left(\frac{2153}{1113}\right) \approx 0,66 \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever: $P(t) = 1113 e^{0,66t}$.

10.1 $A(10) = 20 \times e^{-0,2(10)}$ **Pág. 94**
 $= 20 \times e^{-2} = \frac{20}{e^2} = 2,71$ (2 c. d.)

Inicialmente havia 20 g, 10 segundos após a observação inicial já só haviam 2,71 g de composto.

10.2 $10 = 20 \times e^{-0,2t}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{-0,2t} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -0,2t &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,2} \\ \Leftrightarrow t &= 3,47 \text{ (2 c. d.)} \end{aligned}$$

Para que a quantidade de composto se reduza a metade terão de decorrer 3,47 segundos.

11.1 $P(3) = 100e^{-0,12 \times 3}$ **Pág. 95**
 $\Leftrightarrow P(3) = 100e^{-0,36} \Leftrightarrow P(3) = 69,77$ (2 c. d.)

Três anos depois da compra, o automóvel vale aproximadamente 69,77 milhares de metcais.

11.2 $P(t+x) = \frac{1}{2} P(t)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 100e^{-0,12(t+x)} &= \frac{1}{2} \times 100e^{-0,12t} \\ \Leftrightarrow 100e^{-0,12t-0,12x} &= 50e^{-0,12t} \\ \Leftrightarrow 2e^{-0,12t-0,12x} &= e^{-0,12t} \\ \Leftrightarrow \frac{e^{-0,12t-0,12x}}{e^{-0,12t}} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow e^{-0,12x} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,12x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,12} \Leftrightarrow x \approx 5,77$$

Interpretação: A um aumento de 5,77 anos corresponde uma redução do valor do automóvel para metade.

11.3 $100e^{-0,12t} = 35 \Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{35}{100}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -0,12t &= \ln\left(\frac{35}{100}\right) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\ln(0,35)}{-0,12} \\ t &= 8,75 \text{ (2 c. d.)} \end{aligned}$$

Quando o automóvel foi vendido tinha, aproximadamente, 8,75 anos.

12. $f(t) = a b^t$

$$f(t) = a(1,05)^t$$

$$f(10) = 4000 \hat{=} a(1,05)^{10} = 4000$$

$$\hat{=} a = 2455,65$$

$$\text{Logo, } f(t) = 2455,65(1,05)^t$$

$$f(7) = 2455,65(1,05)^7 = 3455,35$$

Há três anos, o jardineiro ganhava aproximadamente 3455,35 metcais

1. A afirmação verdadeira é a (C). **Pág. 96**

$$\begin{aligned} \text{a } \frac{1}{3} \hat{=} 3^2 &= 9 \\ \text{b } \frac{1}{3} \hat{=} 3^0 &= 1 \end{aligned}$$

(A) é falsa, porque $f(x) = x^{-3}$ é uma expressão algébrica e não exponencial.

$$\text{(B) é falsa, porque } 3^3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \hat{=} \frac{1}{27} \hat{=} \frac{1}{27}$$

$$\text{(D) é falsa, porque } 2^0 = 1 \hat{=} 1$$

2. A afirmação verdadeira é a (D).

$$5^{-x+1} = 5^{-3x+6}$$

$$\hat{=} -x+1 = -3x+6$$

$$\hat{=} -x+3x = 6-1$$

$$\hat{=} 2x = 5 \hat{=} x = \frac{5}{2}$$

3. A afirmação verdadeira é a (A).

Para todo o valor de $x \in \mathbb{R}$, 6^x é sempre maior do que zero, pelo que $6^x = -1$ é uma equação impossível.

4. A afirmação verdadeira é a (B).

$$0,01 \text{ £ } 10^x$$

$$\hat{=} \frac{1}{100} \text{ £ } 10^x \hat{=} \frac{1}{10^2} \text{ £ } 10^x$$

$$\hat{=} 10^{-2} \text{ £ } 10^x \hat{=} -2 \text{ £ } x \hat{=} x^{-2} - 2$$

$$S = [-2, +\infty[$$

5. A afirmação verdadeira é a (A).

$$x e^x \approx e^{x-1}$$

$$\hat{U} \quad x e^x \approx e^x \times e^{-1}$$

$$\hat{U} \quad x \approx e^{-1} \quad \hat{U} \quad x \approx \frac{1}{e}$$

$$S = \frac{e-1}{e}, \quad + \quad \frac{e-1}{e}$$

6. A afirmação verdadeira é a (B).

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{10^x} \approx 0\}$$

Uma vez que para todo o valor de $x \in \mathbb{R}$, 10^x é sempre maior do que zero, então $\frac{1}{10^x} \approx 0$.

Logo, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1}{10^x}}$ é \mathbb{R} .

7. A afirmação verdadeira é a (A).

$$D = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - e^x \approx 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} \approx e^x\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x \approx x\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x - x \approx 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \approx 0\}$$

Logo, o domínio da função $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$ é $[0, +\infty[$.

8. A afirmação verdadeira é a (B).

$$N(0) = \frac{2800}{1 + 6(0,88)^0} = \frac{2800}{1 + 6 \cdot 1} = \frac{2800}{7} = 400$$

9. A afirmação verdadeira é a (B).

$$e^x > 0 \quad \hat{U} \quad e^x + 1 > 1 \quad \hat{U} \quad -(e^x + 1) \leq -1 \quad \hat{U}$$

$$\hat{U} \quad -e^x - 1 \leq -1$$

Logo, o contradomínio da função é $]-\infty, -1]$.

Número de dias decorridos após 1 de Julho	Total de doentes afectados
1	$4 = 4^1$
2	$16 = 4^2$
3	$64 = 4^3$
4	$256 = 4^4$
5	$1024 = 4^5$
...	...
t	4^t

A expressão pretendida é a seguinte:

$$N(t) = 4^t$$

10.4 $N(12) = 4^{12} = 16777216$ pessoas

10.5 $N(9) = 4^9 = 262144$

$$N(10) = 4^{10} = 1048576$$

Assim, 9 dias não é suficiente, pelo que a resposta deve ser 10 dias.

11.1 $c(0) = 1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^0 = 1300000$

O valor inicial do andar é de 1300000 metcais.

11.2 $\frac{c(x+1) - c(x)}{c(x)}$

$$= \frac{1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^{x+1} - 1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^x}{1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^x}$$

$$= \frac{1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^x \left(\frac{8}{7}\right) - 1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^x}{1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^x}$$

$$= \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7} \approx 0,143$$

Assim, a percentagem de valorização do andar é de aproximadamente 14,3%.

11.3 $c(10) = 1300000 \left(\frac{8}{7}\right)^{10} = 4941546$ (às unidades).

12.1 $f(4) = 30 \cdot \frac{1}{e} - e^{-\frac{4}{3}} = 22$

Uma pessoa pode memorizar 22 símbolos, em 4 minutos.

12.2 $26 = 30 \cdot \frac{1}{e} - e^{-\frac{t}{3}}$

$$\hat{U} \quad 1 - e^{-\frac{t}{3}} = \frac{26}{30} \quad \hat{U} \quad -e^{-\frac{t}{3}} = -\frac{4}{30}$$

$$\hat{U} \quad e^{-\frac{t}{3}} = \frac{4}{30} \quad \hat{U} \quad -\frac{t}{3} = \ln \left(\frac{4}{30}\right)$$

$$\hat{U} \quad t = -3 \cdot \ln \left(\frac{4}{30}\right) \quad \hat{U} \quad t \approx 6$$

Para realizar uma tarefa precisou, aproximadamente, de 6 minutos.

10.1 256 pessoas.

(Ver tabela seguinte)

Pág. 97

10.2

Número de dias decorridos após 1 de Julho	Número de novos doentes	Total de doentes afectados
1	3	4
2	12	16
3	48	64
4	192	256
5	768	1024

10.3 A partir da tabela seguinte, podemos facilmente encontrar a expressão: